Universidade de Lisboa

A Aprendizagem da Noção de Probabilidade Condicionada

Um estudo com alunos do 2º ano do Ensino Profissional

Andreia Filipa Santos Desidério

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelo Professor Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães e pela Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques e coorientado pelo Professor Doutor Pedro Jorge Santos Freitas

2017

Resumo

O presente estudo foi realizado no âmbito da prática de ensino supervisionada e teve por base a lecionação de 9 aulas de 50 minutos, numa turma de 2.º ano do ensino profissional da Escola Fernando Barros Leal, abrangendo o tema Probabilidade Condicionada, no domínio das Probabilidades.

O objetivo do estudo é compreender como os alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Profissional se apropriam da noção de Probabilidade Condicionada e como a utilizam na resolução de tarefas diversificadas, ao longo de uma unidade de ensino que privilegia uma abordagem intuitiva do conceito em contextos diversos. Deste modo, procurei responder a 3 questões: (1) Que conceções os alunos revelam sobre a noção de Probabilidade Condicionada, ao longo da unidade de ensino? Que dificuldades evidenciam sobre esta noção? (2) Que níveis de pensamento em Probabilidade Condicionada revelam os alunos, na resolução de tarefas envolvem esta noção? (3) Como é que os alunos utilizam a noção de Probabilidade Condicionada na resolução de tarefas que a envolvem? Que dificuldades evidenciam?

Os resultados apresentados têm por base uma análise qualitativa dos dados recolhidos a partir da observação participante, apoiada em notas de campo e complementado com gravações áudio e vídeo, bem como recolha documental, constituída pelas produções escritas dos alunos nas tarefas propostas ao longo da unidade de ensino. Os resultados obtidos sugerem que os alunos, em geral, apresentam uma conceção causal da Probabilidade Condicionada, revelando nível 4 do pensamento sobre Probabilidade Condicionada. Evidenciam compreender a noção de Probabilidade Condicionada e mostram ser capazes de a utilizarem na resolução de problemas.

As dificuldades mais difíceis de ultrapassar foram as dificuldades em compreender as diferenças entre a Probabilidade Condicionada e a Probabilidade Conjunta e em compreender a distinção entre uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta que, nalguns casos, se mantiveram até ao fim da unidade de ensino.

Palavras-Chave: Probabilidade Condicionada, Ensino Profissional, Resolução de Tarefas, Dificuldades dos Alunos

Abstract

The current study was carried out as a supervised teaching practice. It was based on the work developed while teaching 9 lessons of 50 minutes, in a 2nd grade class of the professional study of the Escola Fernando Barros Leal and it encompassed the subject of Conditional Probability, in the realm of Probability.

The objective of this study is to understand how these students interpret the notion of Conditional Probability and the way they use it to solve different tasks, in a teaching unit that privileges an intuitive approach of this concept in many different contexts. Therefore, I tried to answer to three specific questions: (1) What conceptions do students reveal about the notion of Conditional Probability throughout the teaching unit? What difficulties do they show about this notion? (2) What levels of thinking in Conditional Probability reveal students in task-solving involving this notion? (3) How do students use the notion of Conditional Probability in solving tasks that involve it? What are the difficulties?

The results presented are based on a qualitative analysis of the data collected from the participant observation, supported by field notes and complemented with audio and video recordings, as well as documentary collection, consisting of written productions of students in the tasks proposed throughout the teaching unit. The results obtained suggest that students, in general, present a causal conception of Conditional Probability, revealing level 4 of the thought about Conditional Probability. They clearly understand the notion of Conditional Probability and they show that they are able to use it in problem solving.

The most difficult difficulties to overcome were the difficulties in understanding the differences between Conditional Probability and Joint Probability and in understanding the distinction between a Conditional Probability and its transposition which in some cases remained the same until the end of the teaching unit.

Keywords: Conditional Probability, Professional Education, Task Resolution, Student’s Difficulties

Dedicatória

AOS MEUS PAIS…

que me ensinaram a ser o que hoje sou.

"A família é o lugar onde começa a vida e o amor nunca acaba."

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Henriques, um obrigado pelas suas orientações e críticas construtivas. Por toda a paciência, apoio e dedicação. Obrigada!

Ao meu orientador, Professor Doutor Henrique Guimarães, um obrigado pelo seu apoio, por tantas aprendizagens que me proporcionou e pela sua dedicação para formar professores. Obrigada!

Ao meu coorientador, Professor Doutor Pedro Freitas, um obrigado pelo seu apoio e motivação, bem como pelos seus conselhos respeitantes ao formalismo matemático das minhas aulas. Obrigada!

À minha professora cooperante, Inês Soares, um obrigado pelo apoio, pelas conversas motivantes quando mais precisei, pela força que me proporcionou, pela confiança que depositou em mim logo desde o início, por estar sempre disponível para me ajudar e, acima de tudo, pela amizade. Obrigada por todos os ensinamentos, tanto para a minha vida profissional como pessoal. Ensinou-me que, acima de tudo, temos de ser nós próprios e acreditar nas nossas capacidades. Com o seu exemplo, reforcei o gosto pelo ensino e a minha vontade em ser professora. Obrigada!

À minha turma, 2.º B, um enorme obrigado por me terem recebido e integrado tão bem. O espírito de companheirismo, excelente comportamento e dedicação, tornou a minha experiência inesquecível. Terminei o ano, da mesma forma que comecei, com a certeza que não poderia ter escolhido uma turma melhor. Desejo-vos muita sorte tanto a nível pessoal como profissional e pretendo voltar a reforçar que estou aqui para vos ajudar no que for necessário. Obrigada!

Ao meu colega Joaquim Francisco, um obrigado pelo companheirismo, pelo apoio, pela entreajuda, por toda a disponibilidade demonstrada e especialmente pelo ótimo trabalho em equipa. Jamais esquecerei todas as conversas de apoio e todas as aprendizagens de vida. Obrigada por me teres acompanhado e apoiado num dos momentos mais difíceis da minha vida. Fazer esta caminhada acompanhada por ti, foi um privilégio. Obrigada!

À Goreti, um obrigado pelas tardes de domingo que disponibilizaste para me ajudar e apoiar, por todos os ensinamentos informáticos. E, em especial, por todas as palavras reconfortantes que me disseste. Obrigada!

A toda a equipa Múltiplus por todo o apoio, carinho, voto de confiança e por toda a compreensão. Obrigada!

À minha pequena Maria, por todos os momentos de alegria, diversão e carinho. Obrigada!

A todos os meus amigos, em especial, à Adriana que me ajudou incansavelmente; à Soraia, que teve sempre uma palavrinha de apoio e conforto para me animar nos dias mais tristonhos; à Andreia, por me fazer rir e alegrar a casa; à Rita, por estar sempre presente apesar da distância e à Carina, por todo o apoio incondicional e todas as palavras de motivação. Um enorme obrigado a todos os meus amigos pela amizade, pelo apoio, pela paciência e pela motivação. Obrigada!

À minha família, em especial, aos avós, padrinhos e primos, por estarem sempre presentes em todas as etapas da minha vida, pelo apoio incondicional, pelos fins-de-semana cheios de alegria e carinho. Obrigada!

Finalmente, tive de guardar os últimos agradecimentos para as 2 pessoas mais importantes da minha vida. Todas as palavras do mundo não chegam para agradecer tudo o que fizeram por mim desde sempre. Aos meus pais um enorme obrigada por estarem sempre presentes, por sempre me apoiarem, por me mimarem, por me ajudarem a crescer e sobretudo por terem tornado este sonho possível. Sempre acreditaram em mim, mesmo quando quis desistir. A vocês, Pai e Mãe, devo-vos tudo o que alcancei até hoje. Devo-vos tudo o que sou hoje. À minha mãe, um obrigado por todos os telefonemas só para me ouvir desabafar, pela paciência, por todos os conselhos, por todos os abraços e pela motivação que sempre me deste. Obrigada MÃE! Ao meu pai por todas as palavras sábias de apoio - "Deus dá as batalhas mais difíceis aos melhores guerreiros" – que guardei com tanto carinho, por todos os esforços, por toda a dedicação e por toda a paciência. Obrigada PAI! São para mim um grande exemplo e um grande apoio.

"Nenhum obstáculo é tão grande, se a nossa vontade de vencer for maior!"

Índice Geral

Índice de Tabelas

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresento as razões que me motivaram à realização deste estudo sobre a aprendizagem da noção de Probabilidade Condicionada, com alunos do 2º ano do ensino profissional, bem como a pertinência do mesmo. Seguidamente, apresento o objetivo e as questões que me proponho a estudar.

1.1. Motivação e Pertinência do Estudo

Atualmente, a Probabilidade, associada à Estatística, desempenha um papel muito importante. no nosso dia-a-dia. De facto, a linguagem da Probabilidade e da Estatística ocupam parte integral das nossas vidas, porque nos deparamos com elas no dia-a-dia, tanto a nível pessoal, como profissional. Desde os jornais, às revistas, às informações acerca do tempo, relatórios económicos, sondagens de opinião, quer tenham um carácter político, quer se trate de publicidade de produtos de consumo, todos ilustram linguagem probabilística importante para compreender essa informação do quotidiano de cada cidadão. Desta forma, dada a sua relevância e influência no quotidiano, "[d]o mesmo modo que foi importante para os nossos pais aprender a ler as palavras, hoje em dia é imprescindível aprender a "ler" os números." (ME, 2001). Assim, de forma a preparar cidadãos que consigam lidar com a quantidade diária de informação que lhes é transmitida, e no sentido de promover uma participação ativa, crítica e informada em relação aos resultados que lhes são apresentados, existe uma necessidade de formação probabilística para todos os alunos.

Alguns investigadores, como Lopes (2008), realçam o papel da educação Estatística/Probabilística no desenvolvimento das capacidades de argumentar e tomar decisões. É essencial preparar os estudantes para que consigam tomar decisões de forma consciente, pois os fenómenos aleatórios atravessam o nosso quotidiano. A Probabilidade, quando associada à Estatística, permite construir conexões entre diversos conceitos Matemáticos e entre diferentes formas de pensamento Matemático. Tal torna-se possível, dadas as capacidades possíveis de desenvolver quando se trabalham em conjunto ambas as áreas e se consegue descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de determinada população. Associar ambas as ciências, permite relacionar os resultados observados com as suas frequências e estimar uma probabilidade para um dado acontecimento. Tanto a Estatística como a Probabilidade devem ser estudadas de forma a garantir um conjunto de ideias e procedimentos que permitam aplicar a Matemática ao mundo real (Canaveze, 2013). Na perspetiva de Lopes (2006, p.79), citado em Canaveze (2013):

> O desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, possibilitando a integração entre a Probabilidade e a Estatística. Nessa conjunção é que se terá o desenvolvimento do raciocínio estocástico.

A Estatística permite ao aluno descrever e analisar dados, representações gráficas, estudar medidas de tendência central e de dispersão. O estudo das Probabilidades permite ao aluno reconhecer o caráter aleatório de fenómenos, formar e categorizar espaços de resultados, prever resultados e, por último, entender correlações (relações entre diversos acontecimentos) (Canaveze, 2013). Desta forma, a Probabilidade organiza e analisa dados estatísticos com a finalidade de descrever e explicar tais dados e determinar possíveis correlações.

Uma das razões, de caráter social, para defender o ensino das Probabilidades é que esta torna os alunos conscientes da natureza probabilística de diversos jogos de azar, que são autênticos negócios para quem os promove e um risco de perder dinheiro para quem aposta (Godino et al, 1996). Além disso, tal como refere o Programa de Matemática dos Cursos Profissionais de Nível Secundário (ME, 2004/05, p.38): “A modelação de fenómenos que, não sendo passíveis de ser descritos por leis determinísticas, encontram nos modelos de probabilidade uma boa alternativa à sua descrição, é a principal motivação para a organização dos conteúdos programáticos deste módulo”. Desta forma, uma das razões para o estudo das Probabilidades passa pela importância do aluno reconhecer que muitos dos acontecimentos do nosso quotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos.

Em suma, o ensino das Probabilidades associado ao ensino da Estatística, integrando diferentes formas de pensamento e raciocínio, permite o desenvolvimento de capacidades que possibilitarão a análise de dados e consequente tomada de decisão, bastante úteis para a vida futura dos alunos.

De forma a acompanhar o crescimento da importância das Probabilidades na vida de todos os cidadãos, têm-se assistido a um aprofundamento do seu ensino nas salas de aula e nas orientações curriculares de muitos países, entre os quais se inclui Portugal (ME, 2007). É possível comprovar esta informação no National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), pois recomenda igualmente o desenvolvimento deste conteúdo: "o estudo das probabilidades proporciona um ambiente natural para os alunos estabelecerem conexões entre a Matemática e as outras disciplinas escolares e as suas experiências quotidianas" (NCTM, 2007, p. 52). A Probabilidade é, portanto, uma ciência que faz parte da Matemática, tornando-se, por vezes, a base de outras disciplinas.

Deste modo, o ensino das Probabilidades torna-se num domínio matemático chave no percurso escolar dos alunos para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático e probabilístico.

> Se o ensino da Matemática se deve ocupar mais de uma forma de pensar do que de uma forma de escrever fórmulas ou numerais, se o ensino da Matemática se deve ocupar mais da tomada consciente de decisões do que do estrito cálculo, então a teoria das probabilidades é fundamental. (Bernardes, 1987, p.13)

Assim, na sala de aula deve haver uma constante preocupação em desenvolver o espírito crítico dos alunos, a sua capacidade argumentativa e a sua capacidade interpretativa. Desta forma, o desenvolvimento destas capacidades deve ocupar todas as aulas da Matemática, incluindo as centradas no ensino das Probabilidades. Para isto, o ensino não se pode limitar à aprendizagem da Matemática, mas também à sua aplicabilidade no quotidiano dos estudantes. Com este intuito, um dos objetivos do ensino das Probabilidades e da Estatística é preparar cidadãos capazes de tomar decisões, no seu quotidiano, de forma consciente.

O meu interesse pelas Probabilidades deve-se, como já referi, à importância que lhe reconheço para o nosso quotidiano e por ser uma unidade de ensino onde os alunos, frequentemente, apresentam grandes dificuldades, principalmente no que diz respeito à Probabilidade Condicionada, tal como salientam alguns estudos (por exemplo, Fernandes, Batanero, Correia, & Gea 2014; Fernandes, Correia & Contreras, 2013). A meu ver, este acaba por ser um tema com elevado grau de desafio para o professor, dada a sua dificuldade, bem como, por vezes, o nível de abstração que ele exige. Desta forma, interessou-me a possibilidade de perceber de que forma o professor pode exercer uma prática letiva que permita aos alunos desenvolver aprendizagens significativas sobre Probabilidades, desenvolvendo o seu raciocínio probabilístico. Na minha experiência pessoal de ensino, enquanto aluna e, depois, explicadora, tenho confirmado que a aprendizagem da Probabilidade Condicionada é caraterizada por dificuldades dos alunos que provêm das mais diversas razões, mas, sobretudo, no que diz respeito ao raciocínio probabilístico e a questões interpretativas.

No ensino profissional, o tema das Probabilidades é abordado no 2º ano do Curso, correspondente ao 11º ano do Ensino Regular, no módulo A7- Probabilidade. Assim, irei aproveitar a oportunidade proporcionada pela minha intervenção letiva no âmbito da prática de ensino supervisionada do Mestrado em Ensino de Matemática, realizada no período de 7 de Fevereiro a 13 de Março numa turma de alunos do 2º ano do Ensino Profissional, para compreender melhor os erros e as dificuldades destes alunos na aprendizagem da Probabilidade Condicionada, de modo a que no futuro possa desenvolver uma prática de sala de aula que os ajude a ultrapassar essas dificuldades, promovendo uma melhor aprendizagem.

A noção de Probabilidade Condicionada é um conceito importante das Probabilidades. Este conceito está relacionado com o facto de em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento já se dispor de alguma informação sobre o resultado dessa experiência, permitindo este conhecimento atualizar a atribuição do valor da probabilidade de ocorrer esse acontecimento. No entanto, a atual investigação, realizada no âmbito do ensino das Probabilidades, mostra que os alunos sentem muitas dificuldades quando lhes é requerida a determinação de probabilidades condicionadas e de probabilidades de acontecimentos compostos (Fernandes, 1999). Para além disso, os alunos evidenciam revelar conceções intuitivas erradas, raciocínios incorretos e erros de compreensão e aplicação da noção de Probabilidade, tal como constatamos no estudo de Sobreiro (2011).

Batanero, Fernandes e Contreras (2009, p. 11) consideram que "a compreensão e a correcta aplicação da Probabilidade Condicionada é fundamental na vida diária e nas aplicações da Estatística, pois ela permite alterar o nosso grau de crença acerca dos sucessos aleatórios à medida que adquirimos nova informação".

Para além disso, a importância deste conceito é reconhecida ao fazer parte dos programas de Matemática do Ensino Secundário, tanto no Ensino Regular, como no Ensino Profissional (ME, 2013) e ao constar frequentemente em Exames Nacionais e Testes Intermédios de Matemática. No entanto, a importância que lhe é atribuída contrasta com a existência de grandes dificuldades que os alunos demonstram na aquisição do conceito, bem como na aquisição de conceitos ligados à Probabilidade Condicionada.

Apesar das dificuldades acima referidas, a noção de Probabilidade Condicionada é de grande pertinência, servindo de suporte ao desenvolvimento de outros conceitos, dos quais são exemplos a probabilidade conjunta, a independência, o conceito subjetivo de probabilidade ou a inferência estatística (Borovcnik, 2012).

Assim, dada a importância atribuída ao estudo da Probabilidade Condicionada, torna-se relevante a investigação didática nesta área, de forma a identificar as dificuldades dos alunos em relação à noção de Probabilidade Condicionada e na utilização da mesma na resolução de problemas, de forma a refletir sobre o processo de aprendizagem dos alunos nesta temática. Desta forma, um dos interesses do meu estudo passa por, futuramente, conseguir apostar numa abordagem deste tema que vá ao encontro das dificuldades mais evidenciadas na literatura desta temática, ajudando-os a ultrapassá-las. Assim, considero importante um estudo detalhado sobre as dificuldades e os erros dos alunos, bem como sobre a noção de Probabilidade Condicionada que constroem ao longo da lecionação.

1.2. Objetivo e Questões do Estudo

O objetivo do estudo é compreender como os alunos de uma turma de 2.º ano do Ensino Profissional se apropriam da noção de Probabilidade Condicionada e como a utilizam na resolução de tarefas diversificadas, ao longo de uma unidade de ensino que privilegia uma abordagem intuitiva do conceito em contextos diversos, isto é, em tarefas que privilegiam contextos reais e a aplicação do conceito de forma mais abstrata, utilizando a definição da Probabilidade Condicionada. Neste sentido, irei procurar responder às seguintes questões orientadoras do meu estudo:

a) Que conceções os alunos revelam sobre a noção de Probabilidade Condicionada, ao longo da unidade de ensino? Que dificuldades evidenciam sobre esta noção?

b) Que níveis de pensamento em Probabilidade Condicionada revelam os alunos, na resolução de tarefas envolvem esta noção?

c) Como é que os alunos utilizam a noção de Probabilidade Condicionada na resolução de tarefas que a envolvem? Que dificuldades evidenciam?

Capítulo 2

Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo apresento as orientações curriculares para o ensino e a aprendizagem das Probabilidades, bem como uma revisão de literatura considerada relevante para enquadrar a problemática do estudo. Neste sentido, abordo aspetos gerais relacionados com a literacia e o raciocínio probabilístico, enquanto finalidades do ensino das Probabilidades. De seguida, foco-me na importância do ensino e aprendizagem da noção de Probabilidade Condicionada, assim como nas dificuldades dos alunos na compreensão desse conceito. Por último, refiro a importância das tarefas exploratórias e dos problemas no processo de ensino e aprendizagem das Probabilidades.

2.1. A Probabilidade

Em termos históricos, as primeiras interpelações sobre Probabilidades surgem com problemas levantados pelo acaso e associados a "jogos de azar" (Eves, 2011). Em Portugal, a abordagem Matemática do acaso, do azar e do risco só se iniciou há pouco mais de 500 anos. A disciplina Teoria das Probabilidades nasceu das tentativas de quantificação dos riscos dos seguros e de avaliar as possibilidades de se ganhar em jogos de azar. Cerca de 250 anos depois, com Daniel Bernoulli, a Matemática dos seguros atingiu um estado suficientemente maduro. Ele retomou um problema clássico de, a partir de um número determinado de recém-nascidos, calcular o número esperado de sobreviventes após *n* anos. Girolamo Cardano (1501/1576) foi um matemático notável e escreveu um pequeno manual de jogos de azar "Liber de Ludo Aleae" (1663), que é, talvez, o primeiro livro sobre Probabilidades e que analisa jogos e possibilidades. Cardano foi pioneiro na introdução de técnicas combinatórias para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis num evento aleatório. Limitou-se a resolver alguns problemas concretos, isto é, problemas com dados estritamente numéricos, mas nunca chegou a produzir nenhum teorema. Podemos considerar Pascal (1623/1662) e Fermat (1601/1665) como sendo os fundadores do Cálculo das

Probabilidades (Ferreira & Tavares). No entanto, foi Laplace quem enunciou pela primeira vez a definição formal do conceito de Probabilidade.

No princípio do século XIX é adotada a relação que aprendemos em Matemática como a Lei de Laplace (definição clássica de Probabilidades): "Dado o espaço de resultados S, constituído por um número finito n de elementos, todos eles igualmente possíveis, define-se probabilidade do acontecimento A, e representa-se por P(A), como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis a A (resultados que compõem A) e o número de resultados possíveis (resultados que compõem S)" (Graça, 2013). Desta definição resultam as seguintes propriedades:

<u>Propriedades:</u>

Seja Ω um conjunto finito. Pode-se formalizar a definição clássica da seguinte forma:

Se $A \subseteq \Omega$, $P(A) = \frac{\textit{número de elementos de } A}{\textit{número de elementos de } \Omega}$

Agora é possível provar que a função de conjunto P(.) tem as seguintes propriedades:

para todo $A \subseteq \Omega$ vale que $0 \leq P(A) \leq 1$;

$P(\Omega) = 1$;

se $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + Pr(B)$.

No entanto, existem mais significados para o conceito de Probabilidade, tais como, por exemplo, a definição frequencista de Probabilidades que enuncia: "A Probabilidade de um acontecimento A, representada por P(A), é o valor obtido para a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com que se realiza A tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1. Este valor é interpretado como sendo a probabilidade do acontecimento A se realizar" (Graça, 2013). Desta definição resultam as seguintes propriedades:

Propriedades:

Daremos agora o contexto formal da definição frequencista. Seja neste caso Ω o espaço dos resultados (finito ou não) de um fenómeno aleatório e seja A um evento de Ω. São realizadas *n* repetições independentes da experiência, sempre nas mesmas condições. Seja freq(A) = número de ocorrências de A (nas n repetições); então:

$freq(\Omega) = n$;

para todo $A \subseteq \Omega$ vale que $0 \leq freq(A) \leq n$ = número de repetições;

se $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ então $freq(A \cup B) = freq(A) + freq(B)$.

Por último, a definição axiomática de Probabilidade, criada por Kolmogoroff, em 1933, que colocou como axiomas as propriedades comuns das noções de probabilidade clássica e frequencista, tornando-se casos particulares da definição axiomática.

Definição de Kolmogoroff:

Seja Ω um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função de conjunto P(.) que associa a subconjuntos A de Ω um número real P(A) que satisfaz:

para todo $A \subseteq \Omega$ vale que $0 \leq P(A) \leq 1$;

$P(\Omega) = 1$;

se $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Teorema:

Seja Ω um conjunto não vazio e P uma probabilidade em Ω. Então são verdadeiras as seguintes afirmações.

$P(\emptyset) = 0$;

$P(Ac\ ) = 1 – P(A)$;

se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$ e $P(B \backslash A) = P(B) – P(A)$;

$P(B \backslash A) = P(B) – P(B \cap A)$;

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

A Probabilidade está relacionada com diversas áreas da Matemática, tais como os Números e a Geometria. Assim, “os conceitos de probabilidade funcionam como base para a recolha, descrição e interpretação de dados” (NCTM, 2008, p. 55). Para além disso, usamos diariamente o cálculo das Probabilidades de forma intuitiva, quando olhamos para o tempo, sentimos a temperatura, lemos jornais, ouvimos notícias consultamos informação sobre a previsão do tempo em determinado dia e, a partir daí, escolhemos a roupa que vamos usar, ou até mesmo, quando diariamente prevemos o tempo que levamos a chegar até ao trabalho ou à escola consoante a probabilidade de haver ou não trânsito congestionado. Neste sentido, este tema matemático tornou-se cada vez mais importante e cada vez mais falado em várias partes do mundo, pelo que a sua importância foi crescendo até aos dias de hoje, onde já se nota a sua presença no ensino da Matemática e, consequentemente, nas orientações curriculares.

Por fim, é importante destacar que a teoria das Probabilidades, apesar de ter sido impulsionada por “jogos de azar”, com o seu desenvolvimento ganhou uma enorme relevância nas mais variadas aplicações, tais como na ciência, na medicina, nas finanças, entre outras.

2.2. O Ensino e a Aprendizagem da Probabilidade Condicionada

No nosso dia-a-dia, "a necessidade de compreender e de ser capaz de usar a Matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente" (NCTM, 2007, p. 4) e a Probabilidade é exemplo disso, pois, quer seja no supermercado, nos jornais ou na televisão, estamos constantemente a ser invadidos por números e pela Matemática. Muitos destes dados são dados estatísticos e probabilísticos. Assim, nos dias de hoje, é importante que todos os cidadãos tenham algum raciocínio probabilístico e alguma formação nesse campo. Os números tornaram-se tão essenciais, que não passa um dia das nossas vidas no qual não sejamos confrontados com eles, ou porque no telejornal estão a apresentar uma sondagem ou porque temos de contabilizar o dinheiro para o pão, são inúmeros os exemplos diários da utilização da Matemática. Deste modo, podemos qualificar a Matemática em três das suas imensas qualidades, como refere Henrique Guimarães (2013), numa das suas intervenções no ProfMat2013:

> A primeira é a universalidade — a Matemática é talvez, das conquistas, das produções culturais da humanidade que adquiriu ou que foi adquirindo progressivamente uma maior universalidade. Eu sei que é um bocado exagerado, a Matemática não está em todo o lado, mas foi cada vez estando mais em mais ‹sítios› e por toda a parte. A segunda característica que eu queria referir é a aplicabilidade, noção que uso aqui num sentido amplo — a Matemática é reconhecidamente (e cada vez mais) uma ciência com inúmeras aplicações, com relações de grande fecundidade com os múltiplos campos de saber e da atividade humana. A terceira, que provavelmente tem ligações com esta última é (e eu não consigo arranjar uma maneira melhor de a dizer): a Matemática é um elemento de inteligibilidade do mundo. O que é que eu quero dizer com isso? Vou recorrer à ideia de linguagem naquele sentido de uma janela que se abre para o mundo. Cada linguagem permite-nos aceder a um mundo, e a Matemática, nesse sentido, é uma linguagem — com a Matemática nós ficamos a compreender melhor o mundo.

Neste sentido, torna-se essencial que o ensino da Matemática seja um ponto de referência para formar cidadãos bem preparados para o futuro. Para isso, é essencial perceber de que forma os alunos compreendem os conceitos matemáticos, que significados lhes atribuem e como é que essas noções se vão desenvolvendo.

Entre outros ramos da Matemática, atualmente, a Teoria das Probabilidades tem um papel importante em quase todos os ramos da ciência, desde a medicina, onde se avaliam os riscos dos efeitos de diversos tratamentos (por exemplo, na tomada de decisões sobre diversas campanhas), até ao controlo de qualidade, na indústria, para se obter uma maior precisão nas decisões, perante situações de incerteza (Murteira & Antunes, 2012). Conforme estava estabelecido no programa anterior de Matemática A do 12.º ano (ME, 2002, p. 2):

> As probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar casos de incerteza e para previsões baseadas na incerteza. Este estudo, que pode ser em grande parte experimental, fornece uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica, toda a comunicação que utiliza a linguagem das probabilidades, bem como a linguagem estatística.

Desta forma, as Probabilidades ocupam um lugar bastante relevante nas nossas vidas, pois contactamos com informação diversa, sendo que o saber probabilístico influencia as decisões que tomamos.

O pensamento estatístico e probabilístico apresenta uma enorme expansão, tendo uma importância crescente na sociedade atual. A qualquer cidadão coloca-se, diariamente, o desafio de gerir e utilizar a informação que lhe chega através dos jornais ou até mesmo no seu local de trabalho, para tomar conscientemente as suas decisões, sendo portanto imprescindível a aquisição de competências e conhecimentos para atingir esse fim (Fernandes & Barros, 2005). Assim, para formar cidadãos com um espírito critico, reflexivo e participativo ativo, é importante o seu desenvolvimento desde cedo, pois também as crianças lidam, diariamente com dados - "desenvolver o pensamento estatístico e probabilístico ao longo da escolaridade constitui um aspeto importante da formação que a escola deve proporcionar" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, citado em Fernandes & Barros, 2005).

Com este intuito, torna-se fundamental formar cidadãos capazes de organizar, analisar e interpretar dados de relevância social, como por exemplo, taxas de desemprego, criminalidade, crescimento, entre outros, a fim de atuarem e decidirem com sentido crítico e de forma consciente no meio onde se inserem. Nesse sentido, o ensino das Probabilidades acaba por ser um elemento de elevada relevância para essa formação. Para Santos (2010, p.11), o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos jovens "depende, e muito, das ações didáticas que necessitam ser realizadas com os alunos, nas escolas, uma vez que pouca ou nenhuma experiência probabilística é experienciada e/ou observada por eles, sem que haja uma intervenção".

Assim, é importante desenvolver nos alunos o seu espírito crítico e o seu raciocínio probabilístico. Mas para isso é essencial perceber de que forma os alunos compreendem os conceitos probabilísticos, que significados lhes atribuem e como é que estas noções se vão desenvolvendo, logo desde o momento da introdução destes conceitos.

Há cerca de duas décadas que, em Portugal, as Probabilidades integram os programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário (Fernandes & Barros, 2005). No atual programa de Matemática A do Ensino Secundário (ME, 2002) podemos verificar a importância que se dá ao estudo de conceitos envolvendo Probabilidades, introduzido no tópico "Probabilidades e Estatística" do plano de estudos da disciplina, que aborda no 12º ano espaços de Probabilidade e Probabilidade Condicionada. Por sua vez, no Ensino Profissional também é notável a importância das Probabilidades, visto que integra um módulo desta disciplina. Para além disso, o NCTM recomenda o desenvolvimento deste tema, porque: "o estudo das probabilidades proporciona um ambiente natural para os alunos estabelecerem conexões entre a Matemática e outras disciplinas escolares e as suas experiências quotidianas" (NCTM, 2008, p.52). Além disso, acrescenta que do 9.º ano ao 12.º ano, "os alunos devem ser capazes de descrever espaços amostrais como o conjunto de resultados (…). Durante estes anos de escolaridade, os alunos deverão aprender a identificar acontecimentos mutuamente exclusivos, complementares e condicionados" (NCTM, 2008, p. 390).

Um dos conceitos mais importantes das Probabilidades é o de Probabilidade Condicionada, que está relacionado com o facto de em muitas situações que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento já se dispor de alguma informação sobre o resultado da experiência, permitindo atualizar a atribuição de probabilidades a esse acontecimento. Segundo Díaz e de la Fuente (2005), a Probabilidade Condicionada é um conceito que pode ser definido com diferentes graus de formalização. No entanto, a sua abordagem em diversos manuais escolares de Matemática faz-se através de uma definição formal mais ou menos extensível em termos de complementaridade de informação. O Quadro 1 mostra a definição deste conceito segundo vários autores.

Quadro 1: Definições de Probabilidade Condicionada Segundo Vários Autores

Autores	Definição
Oliveira (2012)	"Probabilidade Condicionada de *A* sabendo que *B* ocorreu é a razão entre a probabilidade de interseção de *A* e *B* e a probabilidade de *B*, desde que $P(B) > 0$. Representa-se por $P(A\|B)$." (Oliveira, 2012, p.13)
Andrade et al. (2012)	"dados os acontecimentos *A* e *B* de um espaço de resultados *E*, com $P(A) \neq 0$, chama-se Probabilidade Condicionada de *A*, dado *B*, e escreve-se $P(A\|B)$, ao valor definido por: $P(A\|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$" (Andrade et al., 2012, p.34)
Costa & Rodrigues (2012)	"sendo *A* e *B* dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória e tais que $P(B) \neq 0$, chama-se Probabilidade Condicionada de *A*, dado *B*, e representa-se por $P(A\|B)$, ao valor $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. $P(A\|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Da igualdade resulta que $P(A \cap B) = P(A\|B)P(B)$" (Costa & Rodrigues, 2012, p.40)
Pestana & Velosa (2010)	"Probabilidade Condicionada de *A* dado *B* como $P(A\|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$" (Pestana & Velosa, 2010, p.232)
Murteira & Antunes (2012)	"dados dois acontecimentos *A*, *B* c Ω, *A*, *B* ϵ A* (σ-álgebra), $P(B) > 0$, a probabilidade para que *A* se realize dado ou sabendo-se que *B* se realizou, designa-se Probabilidade Condicionada, representa-se por $P(A\|B)$, e define-se pelo quociente $P(A\|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$". Esta probabilidade representa a reavaliação da probabilidade de *A* face da informação que *B* se realizou. (Murteira & Antunes, 2012, p.67)
Neves et al. (2012)	"Sejam *A* e *B* dois acontecimentos de um espaço *S*. Representa-se por $P(A\|B)$ a probabilidade de ocorrência de *A*, na hipótese de *B* se ter realizado. Supor que se realizou *B* equivale a restringir o universo aos acontecimentos elementares de *B*. Assim, a Probabilidade Condicionada $P(A\|B)$ pode ser interpretada como uma probabilidade que tem subjacente um novo espaço amostral, *B*, subconjunto do espaço original. Os acontecimentos elementares de *A*, tendo-se realizado *B*, correspondem aos acontecimentos $A \cap B$. Assim somos conduzidos à definição: $P(A\|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0, A\ C\ S\ e\ B\ C\ S$" (Neves et al., 2012, p.108)

O estudo das Probabilidades não é fácil, pois envolve conceitos contraintuitivos, bem como a Probabilidade Condicionada, porque formaliza a mudança do nosso grau de crença quando dispomos de nova informação, podendo ainda se transformar num problema e numa aprendizagem mais difícil de adquirir pelos alunos (Cunha, 2010).

No ensino regular, o estudo da Probabilidade Condicionada ganha relevo no 12.º ano, assim como a noção de acontecimentos independentes, que surge no âmbito da Probabilidade Condicionada. No entanto, professores no terreno e estudos publicados sobre esta temática têm mostrado que a noção de Probabilidade Condicionada não é de fácil apreensão por parte da generalidade dos alunos com nível de maturidade esperado num 12.º ano (Guilherme, 2011). Assim, estudos apontam para a existência de intuições incorretas, erros de raciocínio, erros de compreensão de enunciado e erros de aplicação do conceito de Probabilidade Condicionada e acontecimentos independentes. Alguns destes erros estão bastante enraizados nos alunos, sendo que um ensino formal da noção do conceito de Probabilidade Condicionada pode não ser o suficiente para os ultrapassar, tornando-se necessário que as pessoas se tornem conscientes das dificuldades e aprendam a abordar os problemas de probabilidades condicionadas com ferramentas adequadas (Díaz, 2009).

Neste sentido, Carvalho e Fernandes (2005) destacam a relevância de promover experiências na escola, onde os alunos desenvolvam noções intuitivas deste conceito adequadas às suas vivências, explorando situações que os levem a adquirir níveis mais elaborados das intuições iniciais. Fischbein (1975) considera que é importante que se proceda a um ensino experimental, para que as dificuldades sentidas pelos alunos não permaneçam de forma tão constante e permanente ao longo do tempo, pois estas dificuldades vão continuar a influenciar erradamente as suas decisões e pensamentos. Por sua vez, Way (2003) defende que existem evidências bem claras que o pensamento probabilístico está ligado ao desenvolvimento cognitivo e que a habilidade da criança em fazer julgamentos envolvendo o acaso se realiza de acordo com etapas. Também Godino et al. (1996) defende que:

> A Probabilidade pode ser tão aplicada à realidade como a aritmética elementar, não sendo preciso o conhecimento de teorias físicas nem de técnicas Matemáticas complicadas. Pelas suas muitas aplicações, adequadamente compreendidas, a probabilidade proporciona uma Excelente oportunidade para mostrar aos estudantes como matematizar, como aplicar a Matemática para resolver problemas reais. Em consequência, o ensino das noções probabilísticas pode ser levado a cabo mediante uma metodologia heurística activa e através da colocação de problemas concretos e da realização de experiências reais ou simuladas (Godino et al., 1996, p.12).

No processo de ensino e aprendizagem, o desenvolvimento da compreensão é uma ferramenta essencial, porque o domínio correto dos conceitos e dos procedimentos permite a resolução eficaz de problemas novos e de novas situações.

> Em Matemática esta capacidade é particularmente desafiante, pois o que verificamos na nossa prática é que os alunos apenas tentam memorizar fórmulas e procedimentos para resolver situações bem definidas e muito dificilmente são capazes de aplicar os conceitos adquiridos a situações reais com que são e vão ser confrontados em toda a sua vida. É pois necessário desenvolver nos alunos a capacidade de aplicar os conhecimentos adquiridos a situações reais e que lhes possam surgir em contexto de vida real (Cunha, 2010, p. 4).

A compreensão de qualquer conceito Matemático, em particular da Probabilidade Condicionada, está associada à compreensão do saber fazer, no sentido que cada sujeito compreende um determinado conceito Matemático quando o usa de maneira capaz em diferentes práticas e não no sentido de um processo meramente mental (Godino, Batanero & Font, 2007). Assim, "a compreensão de um conceito é um processo contínuo e crescente no qual o aluno constrói e relaciona diferentes elementos de interpretação que são inerentes ao conceito" (Carvalho, 2013, p. 23). Portanto, é importante efetuar uma boa planificação para que todo o processo de ensino e aprendizagem seja efetuado da melhor forma. Podemos partir da compreensão intuitiva dos conceitos que, segundo Fischbein & Gazit (1984) citado em Carvalho (2013, p. 25), "corresponde a avaliações ou previsões sintéticas ou globais, não justificáveis explicitamente". No entanto, Fischbein (1975, p. 12) defende que:

> A intuição probabilística não se desenrola espontaneamente, excepto dentro de uns limites muito estreitos. A compreensão, interpretação, avaliação e predição de fenómenos probabilísticos não podem ser confinadas a intuições primárias que têm sido desprezadas, esquecidas e abandonadas num estado de desenvolvimento rudimentar sob pressão de esquemas operacionais que não se podem articular com elas.

Esse conhecimento global é sentido pelo aluno como sendo autoevidente, autoconsciente e dificilmente questionável, isto é, uma intuição é uma crença cognitiva. Batanero (2004) considera que apesar das ideias construtivistas considerarem que o aluno deve ser o construtor do seu próprio conhecimento, o professor deve guiar o aluno ao longo de todo o processo de construção do conhecimento, ajudando-o a ultrapassar obstáculos e proporcionando-lhe, simultaneamente, as ferramentas necessárias para tal. Assim, mesmo que por vezes essas intuições não estejam cientificamente corretas, não devem ser ignoradas no processo ensino-aprendizagem, pois devem ser eliminadas, devendo-se proporcionar ao aluno o desenvolvimento das representações intuitivas adequadas. Caso estas intuições sejam corretas podem ajudar o aluno a adquirir e a integrar o correspondente conhecimento científico.

Uma noção intuitiva de Probabilidade Condicionada, no sentido de consistir na probabilidade de um acontecimento ocorrer na condição de se ter conhecimento prévio sobre outro, é a mais explorada em exercícios dos manuais do Ensino Secundário (Carvalho, 2013). Podemos verificar isto através da análise das provas externas de Matemática A do Ministério da Educação Matemática, em diferentes anos, nas quais as questões acerca de Probabilidade Condicionada pedem, habitualmente, justificações de raciocínio e/ou explicações acerca do conceito, evitando que os alunos utilizem a expressão algébrica do conceito sem compreensão do mesmo.

Segundo Guilherme (2011), em questões sobre Probabilidade Condicionada, pode obter-se dois tipos de resposta para a resolução de um determinado tipo de situação-problema em que esta noção intervém: o sistema de práticas realizadas por um sujeito pessoal, significado pessoal, ou o compartilhado por uma instituição, significado institucional, que consiste em descobrir um valor para a probabilidade de um acontecimento que é condicionado por outro. Desta forma, na opinião de Neto (2009), os significados que os alunos atribuem aos termos e símbolos matemáticos, aos conceitos e proposições, devem ser alvo de estudo, assim como a construção destas noções como consequência de processos de ensino.

A importância deste tema, por vezes, contrasta com as dificuldades que os alunos experimentam na sua aprendizagem, principalmente quando nos referimos à Probabilidade Condicionada e à probabilidade conjunta que estão entre aquelas que mais ideias erradas despoletam nos alunos, sendo que, por outro lado, essas ideias não tendem a desaparecer simplesmente a partir do desenvolvimento cognitivo espontâneo dos alunos (Fernandes, Correia & Contreras, 2013).

Dessa forma, vários investigadores, tais como Watson (1995), defendem que o ensino da Probabilidade Condicionada deve ser antecipado, embora não seja formal, passando a integrar o programa da disciplina de Matemática do Ensino Básico, introduzindo o tópico de forma natural e intuitiva, tal como recomendado em ME (2007). Assim, de acordo com Fernandes, Martinho e Viseu (2015), Watson defende que a sua lecionação poderia passar, por exemplo, por solicitar aos alunos para extraírem afirmações condicionais de notícias, jornais e revistas. Deste modo, defende-se que o conceito de Probabilidade Condicionada pode ser introduzido, por exemplo, no 9.º ano, de forma aos alunos construírem um substrato intuitivo que pode constituir um ponto de partida para o ensino formal do conceito (Fernandes, Correia & Contreras, 2013). Além disso, outros estudos, como Cunha (2010), Sobreiro (2011) e Guilherme (2011), constataram, de forma positiva, que os alunos utilizaram uma variedade de estratégias e inventaram as suas próprias estratégias, para fazer juízos válidos, em problemas envolvendo Probabilidade Condicionada, pelo que consideram que este conceito deve estar presente nos programas de ensino básico, não havendo necessidade de o adiar até ao ensino secundário.

Tal como a literatura refere, o conceito de Probabilidade Condicionada é um dos conceitos centrais para a compreensão do pensamento probabilístico (Fernandes, Batanero, Correia & Gea, 2014), sendo, para além disso, um dos conceitos onde os alunos sentem muitas dificuldades (Fernandes, 2001). Nesse sentido, é importante estudar os raciocínios e as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvam a noção de Probabilidade Condicionada. A Probabilidade Condicionada é um conceito que se pode definir com diferentes graus de formalização. Sobreiro (2011), no seu estudo, utilizou os níveis de pensamento dos alunos sobre Probabilidade Condicionada, desenvolvidos por Tarr e Lannin (2005) e, de acordo com as caraterizações de cada nível, sintetizou-os no quadro 2 que se segue:

Quadro 2: Níveis de Avaliação do Pensamento dos Alunos em Probabilidade Condicionada Segundo Tarr e Lannin (2005), Citados em Sobreiro (2011)

	Probabilidade Condicionada
Nível 1 (Informal)	Reconhecem acontecimentos "certos" e "impossíveis" em situações com reposição e sem reposição; Utilizam geralmente raciocínios subjetivos quando considera a Probabilidade Condicionada em situações com e sem reposição; Ignoram informações numéricas ao formularem previsões.
Nível 2 (Transicional)	Reconhecem que a probabilidade de alguns acontecimentos se altera em situações de não reposição, contudo esse reconhecimento é incompleto e é usualmente confinado a acontecimentos que aconteceram previamente; Usam inapropriadamente os números ao determinar Probabilidade Condicionadas. Por exemplo, quando um espaço amostral contém dois resultados, assumem sempre que os dois resultados são equiprováveis; A representatividade atua como causa de confusão ao tomar decisões em Probabilidade Condicionada; Podem reverter julgamentos subjetivos.
Nível 3 (Quantitativo Informal)	Reconhecem que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera em situações de não reposição; Mantêm o controlo da composição total do espaço amostral para julgar o relacionamento de dois acontecimentos nas situações com e sem reposição; Conseguem quantificar, embora sem precisão, a mudança de probabilidades nas situações sem reposição.
Nível 4 (Numérico)	Atribuem probabilidades numéricas em situações com e sem reposição; Usam raciocínios numéricos para comparar a probabilidade de acontecimentos antes e depois de cada tentativa em situações com e sem reposição; Estabelecem as condições necessárias ao abrigo das quais dois acontecimentos estão relacionados.

Tarr e Lannin (2005), em pesquisas mais recentes, completaram a informação de base do Quadro 2 e consideraram ainda que:

Nível 1: Os alunos tendem a confiar em julgamentos subjetivos e a acreditarem que podem controlar o resultado de um acontecimento, ignorando a informação quantitativa na formulação de julgamentos probabilístico;

Nível 2: Os alunos encontram-se numa fase de transição entre um pensamento subjetivo e um pensamento quantitativo informal, são distraídos por caraterísticas irrelevantes, tendem a ser mais confiantes na distribuição da previsão de resultados quando fazem previsões e são muito propensos a recorrer a estratégias de representatividade;

Nível 3: Os alunos estão conscientes do papel da informação quantitativa nos julgamentos de Probabilidade Condicionada e, apesar de não atribuírem probabilidades numéricas precisas, usam frequentemente as frequências relativas, os rácios ou alguma forma de probabilidades como uma estratégia adequada para determinar probabilidades condicionadas;

Nível 4: Os alunos usam o raciocínio numérico para interpretarem situações de Probabilidade Condicionada. Dado que estão conscientes do papel que os números desempenham na formação de juízos em probabilidades, monitorizam de perto a composição do espaço amostral e reconhecem a sua importância para verificar se dois acontecimentos são ou não independentes.

Apesar de os conceitos relacionados com a Probabilidade Condicionada não revelarem grande dificuldade para os alunos, pois não exigem cálculos complexos nem conhecimentos profundos de Matemática e Álgebra, até mesmo os alunos com preparação Matemática mostram dificuldades neste campo, tal como podemos ver em diversas investigações.

Citado por Díaz (2007), Totohasina (1992) propôs problemas de Probabilidade Condicionada a alunos que já tinham estudado Probabilidade, ainda que não tivesse sido Probabilidade Condicionada, sendo que cerca de 60% dos alunos resolveram corretamente os problemas propostos, apoiando-se em estratégias variadas, assim como, Diagramas de Árvore, tabelas de dupla entrada e outros esquemas de contagem. No entanto, alguns alunos não interpretaram probabilisticamente o enunciado, outros alunos não restringiram o espaço amostral ao calcular a Probabilidade Condicionada e outros confundiram a probabilidade conjunta com a Probabilidade Condicionada. Gras e Totohasina (1995), citados em Sobreiro (2011), consideram que os conceitos de Probabilidade Condicionada e independência são muito difíceis de ensinar e aprender e verificaram que o conceito de Probabilidade Condicionada foi definido muito tardiamente. Assim, "[p]ara estes autores é preciso entender a axiomática de Kolmogorov (1993) para que o conceito de Probabilidade Condicionada seja formalizado" (Sobreiro, 2011). Cunha (2010) identificou três conceções de caráter cognitivo, que podem constituir entraves ao correto raciocínio em Probabilidade Condicionada, como se pode observar no Quadro 3. As duas primeiras conceções são encaradas como sendo mais suscetíveis de constituírem entraves de caráter epistemológico, ou seja, uma resistência à reversibilidade da noção, e a terceira como um entrave maioritariamente de caráter didático, podendo ser explicada pelo fenómeno de imersão, habitualmente encontrado em situações de extensão de conceitos.

Quadro 3: Conceções de Caráter Cognitivo Que Podem Constituir Entraves ao Correto Raciocínio em Probabilidade Condicionada, Segundo Cunha (2010)

Conceção	Descrição
Conceção cronológica da Probabilidade Condicionada $\boldsymbol{P(A\|B)}$	Esta conceção consiste em entender a Probabilidade Condicionada como impondo sistematicamente uma relação temporal entre os dois acontecimentos *A* e *B*. Se o acontecimento *B* se realiza antes do acontecimento *A*, uma questão que inverta a sequência temporal, pedindo a probabilidade do acontecimento passado conhecido o futuro, parece totalmente desprovida de sentido para os alunos.
Conceção causal da Probabilidade Condicionada $\boldsymbol{P(A\|B)}$	Esta conceção manifesta-se pela introdução, ainda que implícita, de uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante *B* e o acontecimento condicionado *A*. Neste caso, perguntar a um aluno para inverter esta relação e calcular a probabilidade de uma causa conhecendo a consequência pode também ser considerado desprovida de sentido.
Conceção cardinal da Probabilidade Condicionada	Esta conceção consiste na tendência sistemática de representar a Probabilidade Condicionada P(A|B) pela quantificação do quociente $\frac{card\ \{A\cap B\}}{card\{B\}}$, que é correta no caso particular de equiprobabilidade. Outros interpretam $P(A\|B)$ como a proporção $\frac{card\ \{A\}}{card\{B\}}$, que é geralmente falsa.

Dos estudos mencionados anteriormente, a caraterística chave de todos eles reside no valor atribuído ao raciocínio dos alunos durante a lecionação do tema. Assim, nos programas de ensino é esperado que os alunos previssem o valor de um resultado de uma experiência particular, de seguida, realizassem várias experiências e, finalmente, revissem a previsão efetuada. Este modelo conduz a um momento de discussão entre alunos, especialmente propício ao aprofundamento dos seus conhecimentos (Cunha, 2010).

De forma a realçar isso, o estudo de Castro (1998) comparou o impacto de duas formas diferentes de ensino: a mudança conceptual, que consistia em aliciar os alunos a pensar e incentivar a reflexão sobre ideias probabilísticas, e o ensino tradicional, que consistia em apresentar de uma forma linear os conceitos sem se considerar as conceções e os equívocos dos alunos. Com este estudo, concluiu-se que os equívocos em Probabilidade Condicionada e independência foram mais resistentes entre os alunos que receberam o ensino tradicional do que nos alunos sujeitos ao ensino de mudança conceptual. Os alunos sujeitos ao ensino tradicional foram mais propícios em manter as estratégias de representatividade do que aqueles que experimentaram o tipo de lecionação que os confrontou com os seus equívocos.

Por fim, segundo Garfield (1995), quando se pede primeiro aos alunos para fazer previsões, eles ficam mais predispostos a ter cuidado com os resultados.

Tendo em conta a necessidade de atender às capacidades dos alunos de entender os conceitos probabilísticos, têm sido propostas alterações à forma de abordar o tema. Assim, é proposto pelo NCTM (2007) que se passe de um ensino que assentava na utilização formal de regras e da sua aplicação em situações bem definidas, enfatizando métodos de cálculo, para um ensino no qual é sugerida a utilização de atividades de ensino, onde o alunos façam, primeiramente, previsões sobre as possibilidades de ter diferentes resultados em experiências aleatórias simples com recursos a materiais manipulativos, obtenham dados empíricos destas experiências e, finalmente, comparem as probabilidades experimentadas e geradas com as previsões originalmente efetuadas.

Em suma, as tarefas de ensino devem encorajar os alunos a explorar novas situações e a provocar conflitos cognitivos entre os alunos. Sendo que:

> Na perspectiva de ensinar e aprender, é notório que a chave da compreensão da Probabilidade Condicionada reside em fazer conexões entre o espaço amostral e a probabilidade do acontecimento. Ao ligar o espaço amostral com a probabilidade do acontecimento é possível desenvolver a capacidade de escrever a composição do espaço amostral, fazer comparações de probabilidades condicionadas e constatar que a probabilidade de um acontecimento se altera em situações de não reposição. (Cunha, 2010, p. 45)

2.3. Dificuldades dos Alunos na Compreensão do Conceito de Probabilidade Condicionada

Nos últimos anos, vários autores refletiram sobre esta problemática do ensino das Probabilidades, incluindo o ensino das Probabilidades Condicionadas e Conjuntas. De entre as várias abordagens, darei destaque aos trabalhos de José Fernandes, Carmen Batanero e Gustavo Cañadas (2013), José Fernandes, Carmen Batanero, Paulo Correia e María Gea (2014), José Fernandes, Paulo Correia e José Contreras (2013) e, por último, José Fernandes, Maria Nascimento, Maria Cunha e José Contreras (2011).

No estudo de José Fernandes, Carmen Batanero e Gustavo Cañadas (2013), analisou-se o desempenho de alunos futuros educadores e professores do Ensino Básico em determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas. Este estudo foi realizado com a participação de 46 alunos do 3º ano da Licenciatura em Educação Básica. A maioria dos alunos que nele participaram tinha frequentado a unidade curricular Números e Probabilidades, que incluía conteúdos de Probabilidades, designadamente os conceitos de probabilidade conjunta e de Probabilidade Condicionada. Apesar do estudo se focar em ambas as probabilidades, irei salientar mais o estudo realizado no âmbito da Probabilidade Condicionada. Para a recolha de dados do mesmo, os autores aplicaram um questionário com itens de Probabilidade Condicionada e conjunta. Numa das questões realizadas (com quatro alíneas, sendo duas sobre Probabilidade Condicionada e as outras duas sobre probabilidade conjunta), constatou-se que os alunos apresentaram fraco desempenho nos itens de Probabilidade Condicionada. Da análise dos dados, os autores concluíram que o facto de se ter invertido o eixo temporal na sequência dos acontecimentos numa das alíneas, tornou a questão muito mais difícil para os alunos. Sendo que a maioria dos alunos aderiram à falácia da inversão do eixo temporal, onde a probabilidade de algo ocorrer depois não pode afetar algo que ocorreu antes, ignorando a influência do acontecimento condicionante. Assim, os alunos mostraram, implicitamente, que assumem a probabilidade do acontecimento condicionado independentemente do acontecimento condicionante, sendo que não discriminam entre uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta, erro designado por falácia da condicional transposta (Falk, 1986). Ambos os termos, probabilidade condicional e Probabilidade Condicionada, têm sido usados com o mesmo sentido, pelo que ao longo do documento irão surgir ambas as designações conforme os autores que as referem. Nesse mesmo estudo, os alunos também calcularam a probabilidade de apenas um acontecimento, ignorando o acontecimento condicionante. Ainda que em menor percentagem, alguns alunos determinaram a probabilidade conjunta em vez da Probabilidade Condicionada e outros determinaram a Probabilidade Condicionada da transposta. Um erro bastante frequente em vários estudos da literatura, carateriza-se pelo facto de os alunos confundirem os significados das Probabilidades Condicionadas e conjuntas, sendo particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades.

No que se refere à probabilidade conjunta, Fernandes, Batanero e Cañadas (2013) concluíram que os alunos não consideram que a ordem de realização dos acontecimentos conduz a probabilidades diferentes. Para além disso, cerca de um em cada três alunos adicionam probabilidades, quando deveriam multiplicá-las, consideram a reposição e determinaram probabilidades sem as combinarem, para obter o valor da probabilidade pedida. Um erro também bastante comum associado à probabilidade da conjunção é o erro da *falácia da conjunção*, definido por Tversky e Kahneman (1983), que diz que se B é um acontecimento altamente representativo de outro acontecimento A, então $P(A \cap B) > P(A)$.

José Fernandes, Carmen Batanero, Paulo Correia e María Gea (2014) verificaram, na continuação do estudo anterior, com os mesmos 46 alunos futuros professores que, tal como nas questões anteriores do estudo, os alunos apresentaram mais dificuldades nos itens de probabilidade conjunta, comparativamente aos itens de Probabilidade Condicionada. No estudo destas questões, voltou-se a verificar as dificuldades dos alunos ao inverter o eixo temporal na sequencialização dos acontecimentos. Para além disso, também se verificou que os alunos não atendem ao facto de que o espaço amostral se modifica nas situações sem reposição, tal como o postulado de Fischbain e Gazit (1984).

De entre os vários raciocínios desenvolvidos pelos alunos nos itens de Probabilidade Condicionada, no estudo realizado, destacam-se, pela frequência com que foram exibidos, determinar o valor da probabilidade e ignorar o acontecimento condicionante, sendo que o primeiro caso originou respostas corretas e o segundo resultou de respostas erradas. Isto demonstra que que o aluno determinou a probabilidade do acontecimento condicionado ignorando a influência do acontecimento condicionante. Apenas dois alunos acertaram uma questão em que se verifica a inversão do eixo temporal, o que leva a não ser possível determinar a Probabilidade Condicionada a partir da restrição do espaço amostral. Por fim, para além da falácia da inversão do eixo temporal e da falácia da condicional transposta, também se verificou o raciocínio de confundir Probabilidade Condicionada com probabilidade conjunta, significando que o aluno determinou uma probabilidade conjunta quando era pedida uma Probabilidade Condicionada, tal como se verifica em Correia et al (2011).

Em suma, os autores referem que, tanto no caso da Probabilidade Condicionada, como no caso da probabilidade conjunta, verificou-se que, quase sempre, as respostas corretas foram obtidas pela aplicação da regra de Laplace, portanto, enfatizando as relações do tipo parte-todo chegando à conclusão que poderá dever-se à ênfase desta abordagem no cálculo de Probabilidades durante as aulas.

No estudo de José Fernandes, Paulo Correia e José Contreras (2013) participaram 310 alunos do 9º ano de escolaridade. O objetivo deste estudo foi estudar, fundamentalmente, as ideias de alunos do 9º ano sobre Probabilidade Condicionada e probabilidade conjunta no contexto de extração de bolas coloridas de um saco, considerando o tipo de respostas, as estratégias de resolução e os erros cometidos pelos alunos. Para a análise dos dados, foi realizado um questionário aos alunos que incluía nove questões, quase todas com vários itens, sobre independência, Probabilidade Condicionada e Probabilidade geral. Como já referi anteriormente, uma das questões do estudo envolve a extração sucessiva de duas bolas coloridas de um saco, com reposição e sem reposição da primeira bola extraída. Aquando a aplicação do questionário, os alunos já tinham estudado os conteúdos de probabilidades previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano (ME, 2007), no ano letivo de 2011/2012, que incluem aspetos de linguagem e as definições clássica e frequencista de probabilidade, não fazendo parte o estudo formal de Probabilidade Condicionada. Pelo que podemos concluir que as respostas dos alunos foram apenas influenciadas pelas suas intuições relativas ao tema em questão.

Tal como nos restantes estudos, houve uma maior percentagem de respostas erradas nos itens de probabilidade conjunta, quando comparados com os itens de Probabilidade Condicionada. As maiores dificuldades nos itens de probabilidade conjunta podem dever-se ao facto de a probabilidade conjunta estar relacionada com a Probabilidade Condicionada. Sendo que esta aplicação da Probabilidade Condicionada à probabilidade conjunta prespetiva esta última como sendo um conceito mais elaborado do que a primeira (Fernandes, Correia & Contreras, 2013).

Como estratégias apresentadas pelos alunos na resolução destas questões, realça-se o Diagrama de Árvore, a tabela de dupla entrada, a regra do produto, a enumeração sistemática e os desenhos, sendo o Diagrama de Árvore a estratégia mais frequente. Para alunos que ainda não conhecem a definição formal de Probabilidade Condicionada, qualquer uma das estratégias utilizadas facilita a interpretação do enunciado e o raciocínio probabilístico associado à sua intuição. Para além disso, podemos admitir que o maior grau de dificuldade das questões levou a que os alunos utilizassem mais este tipo de estratégias, motivando-os na procura de novas estratégias que os conduzissem à obtenção de uma resposta. Ainda assim, foi possível concluir que é notória a dificuldade dos alunos em recorrer a técnicas organizadas de contagem que lhes permita descrever corretamente o espaço amostral e calcular as respetivas probabilidades. Quando o fazem, a dificuldade subsiste na construção das representações esquemáticas e na sua interpretação (Fernandes, Correia & Contreras, 2013).

Relativamente aos erros dos alunos, um dos mais frequentes foi a confusão entre Probabilidade Condicionada e probabilidade conjunta, que ocorreu sempre que os alunos não foram capazes de distinguir entre ambas as probabilidades da interpretação dos enunciados, tendo os alunos apresentado uma Probabilidade Condicionada quando lhes era pedida uma probabilidade conjunta. Para ajudar os alunos a ultrapassar essa dificuldade, os autores do estudo referem a importância de os alunos aprenderem a interpretar linguagem característica destes dois tipos de acontecimentos.

Não muito comum nos outros estudos, mas aqui presente, foi o erro que consistiu em identificar a probabilidade como uma espécie de "vantagem", isto é, os alunos admitirem a probabilidade como sendo o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos desfavoráveis a um certo acontecimento.

Num dos itens sobre probabilidade conjunta, os alunos calcularam duas probabilidades, ou seja, duas razões de probabilidade quando lhes era solicitado apenas o cálculo de uma. Neste caso, está presente a identificação de probabilidades de acontecimentos em experiências compostas com probabilidades de acontecimentos em experiências simples, o que mostra a importância de os alunos tomarem consciência da necessidade de combinar esses valores através de operações adequadas em ordem a obter a probabilidade pretendida.

Um outro erro, também diagnosticado, consistiu nos alunos centrarem a sua atenção na cor da bola, ou seja, em considerar o atributo cor sem ter em conta as frequências das respetivas cores. Em geral, este erro resultou de os alunos determinarem apenas algumas das sequências possíveis e favoráveis em resultado de não terem distinguido o número de bolas relativos a cada cor e também por não atenderem à reposição ou não reposição da primeira bola antes de se extrair a segunda. A adesão a este erro revela a dificuldade dos alunos em identificarem corretamente o espaço amostral e na aplicação de processos de enumeração completa, aspetos que em muito influenciaram as suas respostas (Fernandes, Correia & Contreras, 2013).

Por fim, alguns erros bastante comuns, quando se fala em Probabilidade Condicionada: o erro da não reposição, que consiste em não considerar a reposição da primeira bola extraída do saco antes de extrair a segunda bola numa extração com reposição e o erro da reposição, que consiste em considerar a reposição da primeira bola numa extração sem reposição. Os alunos também apresentaram dificuldades em considerar a ordem das extrações de bolas distintas, isto é, consideram que as trocas de ordem não geram novas configurações afetando o cálculo das probabilidades pedidas.

Finalmente, na investigação de José Fernandes, Maria Nascimento, Maria Cunha e José Contreras (2011), estudaram-se as respostas e justificações apresentadas por 115 alunos do 12º ano na resolução de problemas de Probabilidade Condicionada, antes e depois de este conceito ter sido lecionado, tendo em vista verificar em que medida o ensino do conceito altera as respostas dades pelos alunos. A estes alunos foi aplicado um teste escrito, sobre Probabilidade Condicionada e sobre independência, em dois momentos distintos, imediatamente antes e imediatamente depois do ensino do tema Probabilidade Condicionada. Sobre o raciocínio dos alunos, encontraram-se na origem dos erros dos alunos a determinação incorreta do número de casos favoráveis ou possíveis, a não consideração da reposição, a incorreta aplicação da fórmula da Probabilidade Condicionada e ainda o facto de um número considerável de alunos parecer não ter feito uma correta interpretação do enunciado. Relativamente às questões do eixo temporal invertido, as respostas incorretas deveram-se à consideração de que a segunda extração não influencia o resultado da primeira, pelo que assumiram que o valor da probabilidade pedida era igual ao valor da probabilidade simples da primeira extração. Nestas questões, houve um elevado número de alunos que aderiram à falácia do eixo temporal. Nas questões relativas ao condicionamento e causalidade, os alunos aderiram à assimetria inferencial da causa para o efeito, o que os levou a responderem corretamente.

Estes investigadores concluíram que, do pré-ensino para o pós-ensino, não se verificaram alterações significativas, quer a nível das respostas, quer a nível dos raciocínios. A única alteração que se constatou foi o uso da fórmula da Probabilidade Condicionada no pós-ensino. Como era natural, a utilização da fórmula da Probabilidade Condicionada só se verificou após a lecionação da mesma. No entanto, a fórmula foi utilizada, muitas vezes, de forma incorreta o que, em muitos casos, explica a diminuição da percentagem de respostas corretas do pré-ensino para o pós-ensino. Em síntese, concluíram, através dos resultados do estudo, que existe pouca influência do ensino sobre o desenvolvimento do conceito de Probabilidade Condicionada (Fernandes, Nascimento, Cunha & Contreras, 2011).

Por fim, podemos concluir, a partir dos estudos realizados, que o significado de Probabilidade Condicionada não é de fácil apreensão por parte da generalidade dos alunos com o nível de maturidade esperado num 12º ano (Guilherme, 2011). Na realidade, atualmente, os estudos de investigação apontam para a existência de intuições incorretas, erros de raciocínio, erros de compreensão de enunciado e erros de aplicação do conceito de Probabilidade Condicionada. Em geral, face a situações-problema, a aplicação de diferentes processos na sua resolução providencia a revelação de várias características dos conceitos envolvidos. (Batanero, Fernandes & Contreras, 2009).

A noção de Probabilidade Condicionada é, em geral, intuitiva para os estudantes, quando aplicada no cálculo de Probabilidades de cadeias de acontecimentos, como por exemplo, "ao retirar bolas de uma urna sucessivamente, sem reposição, a composição da urna altera-se e a probabilidade de se retirar certo tipo de bola depende dos tipos que saíram nas extrações anteriores" (ME, 2004/05, p. 38). No entanto, a literatura mostra-nos que os alunos sentem muitas dificuldades quando lhes é requerida a determinação de probabilidades de acontecimentos compostos de dois acontecimentos (Fernandes, 2001). Assim, podemos concluir que, em situações sem reposição, a Probabilidade Condicionada torna-se mais intuitiva pois a redução do espaço amostral é visível, enquanto isso não se verifica em situações com reposição (Tarr & Lannin, 2005).

No entanto, ao contrário do que se constatava, no seu estudo, Fishbein e Gazit (1984) verificaram que os problemas de Probabilidade Condicionada sem reposição tornam-se mais difíceis do que com reposição, identificando duas conceções erróneas fundamentais no raciocínio em Probabilidade Condicionada dos alunos:

1. Não consideram que o espaço amostral se altera em situação sem reposição;
2. Determinam a probabilidade de acontecimentos onde não há reposição, fazendo uma simples comparação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, antes e depois da primeira tentativa, em vez de fazer comparação com o número total de resultados.

Dos vários estudos mencionados, podemos sintetizar as dificuldades que os alunos apresentam no cálculo da Probabilidade Condicionada:

- Dificuldades na interpretação do espaço amostral (situações com e sem reposição);
- Dificuldade em compreender as diferenças entre a Probabilidade Condicionada e conjunta, isto é, $P(A|B)$ ou $P(A \cap B)$ (Interpretação dos enunciados);
- Erro da falácia da condicional transposta: diferença entre $P(A|B)$ e $P(B|A)$;

- Erro da falácia da inversão do eixo temporal – a probabilidade de algo que ocorre depois não pode afetar algo que ocorreu antes;
- Dificuldades provenientes de se considerar indevidamente a reposição ou não reposição;
- Dificuldades provenientes de se ignorar o acontecimento condicionante – recurso a probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta.

Em suma, pelos estudos que já se realizaram e pela minha pouca experiência de ensino, considero que as dificuldades no cálculo da Probabilidade Condicionada estão relacionadas com a compreensão da noção de Probabilidade Condicionada e com a distinção entre o acontecimento condicionante e o condicionado em problemas que implicam a identificação desses acontecimentos. Como consequência disso, os alunos habitualmente apresentam bastantes dificuldades no estabelecimento do espaço amostral de experiências compostas, apresentando conjuntos de resultados incompletos com base em raciocínios subjetivos ou estratégias de tentativa-erro. Assim, "[e]m geral, as dificuldades dos alunos em estabelecer o espaço amostral de experiências compostas têm origem na exigência de integração de mais do que um aspeto da situação numa estrutura significativa" (Fernandes, Correia & Contreras, 2013), ou seja, por exemplo, quando numa experiência os alunos têm de relacionar a ordem dos elementos e a sua frequência de forma a definir corretamente o espaço amostral.

2.4. A Importância das Tarefas Exploratórias e dos Problemas no Processo de Ensino e Aprendizagem das Probabilidades

Tendo em conta as tarefas exploratórias e os conhecimentos que os alunos mobilizam, dedico esta secção à apresentação dos problemas e das tarefas exploratórias no contexto das Probabilidades.

Em Portugal, as atuais orientações curriculares apresentam metas desafiantes, tanto para os alunos, como para os professores, levando grande parte dos professores a repensar as suas práticas. Com as atuais orientações curriculares, a prática de ensinar Matemática, centrada na exposição de tópicos por parte do professor, seguindo-se da realização de exercícios, não é a mais adequada (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2008). Deste modo, é importante que os professores pensem nas suas aulas de forma a dar oportunidade aos alunos de realizarem tarefas matemáticas significativas, que lhes permitam raciocinar matematicamente e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas (Ponte, 2005). Isto exige que os professores adotem uma abordagem exploratória do ensino, onde centrem as suas aulas nos alunos, permitindo-lhes momentos nos quais possam explorar tarefas ricas e discutir sobre elas, em grupo turma. As tarefas devem traduzir as orientações curriculares, proporcionando aprendizagens significativas, com a compreensão profunda do tema e o desenvolvimento de processos matemáticos, de forma a levar os alunos a compreenderem "o que é fazer Matemática" (Canavarro & Santos, 2012).

> As tarefas matemáticas válidas desafiam os alunos, desenvolvem as suas compreensões e aptidões matemáticas, estimulam-nos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelam à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático e promovem a comunicação sobre a Matemática (NCTM, 1991/199 citado em Canavarro & Santos, 2012).

Assim, é crucial a escolha e adaptação das tarefas matemáticas pelo que, tal como o NCTM (2008) indica, o professor deve ter em conta o nível de dificuldade, se tem ou não procedimentos rotineiros, a complexidade do desafio e o grau de abertura. Segundo Ponte (2005), as tarefas distinguem-se quanto ao seu grau de desafio - elevado ou reduzido - e quanto ao seu grau de estrutura - aberta ou fechada:

Figura 1: Tipologia de tarefas segundo o seu grau de desafio e estrutura. (Ponte, 2005)

As tarefas de estrutura fechada são os exercícios e os problemas. Os exercícios apresentam de uma forma clara o que se pretende e os alunos aplicam diretamente os seus conhecimentos e técnicas sem grande esforço. Por sua vez, os problemas apresentam um grau de desafio mais elevado e "para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e através deste processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos" (NCTM, 2008, p.57).

Nas tarefas abertas, Ponte (2005) integra as tarefas de investigação e as tarefas exploratórias. A principal diferença é, tal como a ilustração demonstra, o grau de desafio exigido aos alunos na sua resolução. Em ambas as tarefas, os alunos têm a oportunidade de formular e conjeturar questões sobre a sua resolução.

Desta forma, nas aulas de Matemática, torna-se importante incluir tarefas exploratórias sobre Probabilidades, sendo este um tema com possibilidade de inúmeras aplicações tanto em tarefas exploratórias como em tarefas investigativas. Dada a aplicabilidade das Probabilidades no dia-a-dia, torna-se importante que no ensino das Probabilidades os alunos se deparem, em alguma situação, com problemas reais, podendo levá-los a interessarem-se pelo ensino da Matemática.

Em certas aulas, é importante que as tarefas exploratórias deem lugar à resolução de problemas que envolvam possíveis situações da realidade, tendo em consideração o contexto onde as tarefas são implementadas. Já o NCTM (1978) defendia que "[a]prender a resolver problemas é a principal razão para estudar Matemática" (p.148), assim recomendava que "a resolução de problemas seja o foco da Matemática escolar" (NCTM, 1980, p.1). Para além disto, é ainda dito que "a resolução de problemas (…) deve ser central na vida escolar, de tal modo que os alunos possam explorar, criar, adaptar-se a novas condições, e activamente criar novo conhecimento no decurso das suas vidas" (NCTM, 1991, p. 5).

Segunda Pólya citado em Ponte (2005), os problemas são essenciais para que os alunos se sintam desafiados a compreender a "verdadeira natureza da Matemática", além de desenvolverem "o seu gosto por esta disciplina" (Ponte, 2005). Através dos problemas, os alunos conseguem fazer a ponte entre os conceitos matemáticos e a sua aplicabilidade na vida prática e, com esse intuito, cabe ao professor enfatizar o significado dos conceitos matemáticos envolvidos na resolução do problema em questão.

Para que os alunos tenham oportunidade de fazerem uma aprendizagem com significado é importante que os problemas possam despertar neles o seu interesse para que se sintam motivados a concluí-los autonomamente. Considerando que resolver um problema é encontrar um caminho que não é conhecido, encontrando uma forma de ultrapassar as dificuldades. Assim, se o problema representar uma dificuldade para o aluno, ele terá a possibilidade de procurar meios para vencer o desafio. Portanto, o objetivo é criar situações que não sejam imediatamente resolvíveis pelo aluno, pois, ele "não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova" (Villa & Callejo, 2006, p. 29). Deste modo, é importante entendermos que o problema não é um exercício de aplicação de conceitos recentemente aprendidos, mas sim o desenvolvimento de uma situação que envolve interpretação e um raciocínio capaz de estabelecer uma estratégia para a resolução.

O grau desafiante dos problemas sem conhecer à partida uma estratégia para os solucionar, ou seja, sem conhecer o ponto de chegada e o caminho a percorrer, implica que os alunos explorem os seus conhecimentos e desenvolvam outros novos conhecimentos, "[i]sto porque aprender Matemática faz mais sentido e esta é mais facilmente memorizada e aplicada, se os alunos relacionarem o conhecimento novo com o conhecimento prévio, de forma significativa" (Schoenfeld, 1988). Ainda assim, torna-se importante que os alunos sejam também capazes, por vezes, de resolver autonomamente um problema de forma a não ficarem desmotivados e a não criarem uma ideia de que fazer Matemática é uma barreira inultrapassável.

No que se refere às Probabilidades, é importante que os alunos sejam capazes de desenvolver o seu raciocínio probabilístico de forma a resolver um problema. No momento de resolução de problemas é vantajoso que os alunos utilizem os seus conhecimentos para escolherem a estratégia a utilizar, pois dessa forma irão, mais facilmente, relacioná-los com os novos conhecimentos. No tema Probabilidades, essas estratégias podem passar por Diagramas de Venn, Diagramas de Árvore, tabelas de dupla entrada, esquemas entre as mais variadas formas, geralmente utilizadas. Nesse sentido, é importante que o ensino das Probabilidades se preocupe com o desenvolvimento desses métodos de forma a criar bases para os alunos os poderem implementar sempre que achem convenientes.

Neste sentido, é importante alguma investigação prévia antes do ensino de novos conceitos, dado que o significado matemático é alcançado através de conexões entre a nova ideia e os conhecimentos prévios dos alunos.

Deste modo, considero que o ensino das Probabilidades deve proporcionar aos alunos momentos de experimentação e investigação. De forma a explorarem situações de aproximação, aleatoriedade e estimação tão características deste tema matemático, em oposição à Matemática que estão habituados, onde se tem como "tradição" a exatidão, o determinismo e o cálculo. Assim, não se limita a visão Matemática que o aluno pode desenvolver e desenvolve-se o estabelecimento de estratégias para a resolução de problemas diversificados que lhes poderão surgir ao longo da sua vida (Lopes & Meirelles, 2005).

Segundo Biehler, citado em Fernandes, Bernabeu, García e Batanero (2009), em contraste com a abordagem analítica, a utilização de materiais manipuláveis e a simulação de experiências apresenta três aspetos positivos no ensino das Probabilidades:

i) Do ponto de vista representacional, os alunos podem pensar e formular modelos concretos em vez de trabalharem com modelos teóricos;

ii) O cálculo vem muito facilitado ao passar do cálculo teórico de probabilidades ou do cálculo combinatório ao cálculo com frequências em ordem a estimar uma probabilidade;

iii) A aprendizagem da modelação, que implica conceber uma experiência e prensar um modelo antes de efetuar cálculos sem sentido e intencionalidade.

Segundo Santos (2008), os alunos habitualmente apresentam dificuldades em resolver problemas, insistindo em encontrar números e em “fazer operações”, sem a preocupação de “pensar sobre” o problema encontrado. Muitos alunos dizem não gostar da disciplina porque não encontram sentido naquilo que fazem.

Neste sentido, os professores devem dar oportunidades aos alunos para formular, discutir e resolver problemas, que requeiram esforço significativo. Neste momento, é importante que os professores encorajem os alunos a refletir e a explicar o seu raciocínio, de forma a desenvolver a comunicação matemática, o raciocínio matemático e a sua capacidade argumentativa.

Assim, pretende-se que a dinâmica das aulas de Matemática seja caraterística das aulas de exploração, que segundo Ponte (2005), se apresentam em três fases distintas e se caraterizam no Quadro 4: Introdução da Tarefa, Resolução da Tarefa e, por fim, Discussão da tarefa e Sistematização das aprendizagens.

Quadro 4: Quadro Simplificado das Ações e Intenções do Professor Relativo à Prática de Ensino Exploratório Adaptado de Canavarro, Oliveira e Menezes. (2012)

	Promoção da Aprendizagem Matemática	**Gestão da Aula**
Introdução da Tarefa	Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos; Fomentar a adesão dos alunos à tarefa.	Organizar o trabalho dos alunos.
Realização da Tarefa	Garantir o desenvolvimento da tarefa pelo aluno; Manter o desafio cognitivo e a autonomia dos alunos.	Promover o trabalho de pares / grupos; Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos; Organizar a discussão a fazer.
Discussão da Tarefa	Fomentar a qualidade Matemática das apresentações dos alunos; Regular as interações entre os alunos na discussão.	Criar ambiente propício à apresentação e discussão; Gerir relações entre os alunos.
Sistematização das Aprendizagens Matemáticas	Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa; Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento das capacidades transversais suscitado pela exploração da tarefa; Criar conexões com aprendizagens anteriores.	Criar ambiente adequado à sistematização; Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização.

Aquando o momento de discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens Matemáticas, os alunos devem ser motivados a desenvolver o espírito crítico, especialmente no confronto com a sua resolução e a dos colegas. Este momento de partilha torna-se assim bastante valioso no que se refere à construção e sintetização dos conhecimentos matemáticos envolvidos.

Nesta metodologia de ensino realça-se o papel fundamental do professor na condução da aula, competindo-lhe a seleção das tarefas que pretende desenvolver, orientar a comunicação e organizar o trabalho na sala de aula. Deste modo, a prática dos professores e as decisões que tomam influenciam de forma determinante a qualidade das aprendizagens dos alunos (Ponte, 2005).

Em suma, também os programas de Matemática atualmente em vigor defendem que o ensino da Matemática deve "desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (ME, 2004/05) e, portanto, defendem aulas mais exploratórias, ou seja, mais centradas no aluno do que no professor.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Este estudo tem por base a minha intervenção letiva numa turma de 2º ano do Ensino Profissional (equivalente ao 11º ano do ensino regular), na unidade de ensino "Probabilidades". Neste capítulo começo por apresentar uma caraterização do contexto escolar, de seguida enquadro a unidade de ensino no programa de Matemática do ensino Profissional (ME, 2004/05) em vigor e apresento a sua planificação, bem como os conceitos e propriedades matemáticos fundamentais presentes nesta unidade. Para além disso, descrevo também as estratégias de ensino adotadas e os recursos utilizados, particularmente as tarefas propostas em sala de aula. Termino este capítulo com uma descrição sumária das aulas lecionadas.

3.1. Caraterização do Contexto Escolar

Caraterização da Escola

A escola onde decorreu a minha intervenção letiva foi a Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal, denominada Escola Profissional Agrícola de Torres Vedras. A mesma localiza-se na Quinta da Fonte Portela, em Runa, concelho de Torres Vedras, numa região rural, nas periferias da cidade de Torres Vedras, e afigura-se com uma instituição educativa de cariz privado.

A Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal foi criada em 1989, tendo iniciado a sua atividade como sendo propriedade da Associação para a Valorização Agrária (AVA),e com a introdução do Curso Técnico de Gestão Agrícola, com apenas vinte e cinco alunos. Ao fim de dez anos de atividade, a escola já tinha cento e sessenta alunos em formação, distribuídos por sete cursos diferentes, todos eles ligados ao sector agropecuário-alimentar. De acordo com o Projeto Educativo da Escola, elaborado em setembro de 2013, atualmente, a escola desenvolve uma oferta formativa que abrange o 3º ciclo do Ensino Básico, com formações de Tratador e Desbastador de Cavalos, Manutenção de Campos de Golfe e Operador Florestal, e o Ensino

Secundário, nas áreas de Produção Agrária (variante de produção vegetal e animal), Turismo Rural e Ambiental e Recursos Florestais.

Em termos de espaços físicos, a escola desenvolveu infraestruturas que permitiram acompanhar o seu crescimento em termos formativos. Desta forma, tem um bar, um refeitório, uma biblioteca, uma sala equipada com computadores, salas equipadas com quadros iterativos, uma exploração agrícola com 33 hectares de vinha, 20 hectares de terra para culturas arvenses e 1100 metros de estufas. Além disso, conta também com uma adega para transformação e armazenamento do vinho "Casal da Portela", produzido na escola, com capacidade para 22 mil e quinhentos litros de vinho, e com um parque para as máquinas agrícolas, possuindo 5 tratores e respetivas alfaias. No que diz respeito ao efetivo animal da escola, este é composto por 15 bovinos, 25 ovinos e 16 equinos.

O corpo docente da Escola é constituído por cerca de 30 docentes internos e externos, sendo que este número varia consoante a oferta formativa de cada ano, incluindo uma professora de educação especial ao serviço do Gabinete de Psicologia e Orientação Vocacional. O corpo não docente da Escola é composto por 25 funcionários que se distribuem pelos setores alimentares, administrativo, limpeza e motorista. Inclui também quatro funcionários ao serviço da atividade agrícola desenvolvida pela Escola e dois técnicos superiores. Relativamente aos alunos, conta com alunos com idades muito dispersas e residentes nos mais diversos locais, desde Lisboa, Peniche, Óbidos, Rio Maior, entre outras localidades.

A EPAFBL é uma escola que mantém o Serviço de Psicologia e Orientação Escolar, proporcionando aos alunos um apoio regular nas vertentes psicológica, psicopedagógica e de orientação nas escolhas vocacionais e profissionais e o Serviço de Educação Especial, que avalia os casos de alunos com necessidades educativas especiais, acompanhando os mesmos. Com a consciencialização da importância fulcral de uma aproximação necessária e saudável entre a escola e os pais/encarregados de educação, no sentido de reunir condições favoráveis ao desenvolvimento equilibrado dos alunos, a escola fundou o Projeto "Pais na escola".

A Escola apresenta-se, ainda, como parceira da comunidade envolvente, apresentando diversas parcerias e projetos com várias entidades de forma a divulgar as atividades e os seus produtos agrícolas - por exemplo, participa em eventos da Câmara Municipal de Torres Vedras, como a Feira Rural, o Oeste Infantil, a Feira de São Pedro, a Festa da Juventude, a Feira da Caça e da Pesca, a Feira da Saúde e as Festas da Cidade. Além disso, coloca as suas instalações e competências ao serviço da comunidade local e regional. De forma a abrir os horizontes dos seus alunos e a sensibilizar a comunidade educativa para a diversidade cultural existente no espaço europeu, a Escola preocupa-se em manter parecerias internacionais. Assim, realiza intercâmbios internacionais e proporciona aos alunos estágios curriculares, nomeadamente para a realização da Prova de Aptidão Profissional, no estrangeiro. Por fim, é uma escola ambientalmente ativa, que participa no Programa Eco- Escolas, Projeto Rios, tem um Clube do Ambiente e aposta nas energias alternativas.

Em síntese, a Escola EPAFBL dispõe de edifícios e recursos materiais adequados à sua missão e tem tido uma evolução formativa relevante ao longo dos tempos.

Caraterização da Turma

A turma onde realizei a minha intervenção é uma turma do 2.º ano do ensino profissional, do curso de Produção Agrária da vertente Animal (2.º B). Esta turma é constituída por 18 alunos, sendo 3 raparigas e 15 rapazes, com idades compreendidas entre os 16 e os 20 anos de idade, com a distribuição apresentada na Tabela 1.

Tabela 1: Idades dos Alunos da Turma 2.º B

Idades	Nº de alunos
16	6
17	4
18	6
19	1
20	1

Nesta turma existem alunos com retenções em anos anteriores e todos os alunos já frequentavam esta escola no ano anterior, no mesmo curso. Apenas um aluno desta turma está a ser acompanhado por um Plano Educativo Individual (PEI), por ter Necessidades Educativas Especiais (NEE). Esse aluno requer uma avaliação diferenciada, que envolve testes com menos conteúdos e com perguntas mais diretas, pois a sua maior dificuldade passa pela interpretação dos enunciados.

No geral, os alunos da turma vêm de um nível socioeconómico médio-baixo, à semelhança dos alunos das restantes turmas da escola. No entanto, a grande maioria dos alunos tem o cuidado de trazer todo o material de trabalho necessário para as aulas de Matemática, nomeadamente o manual escolar, a calculadora e os cadernos respetivos da disciplina.

No que respeita ao comportamento da turma, o conselho de turma declarou que, no geral das disciplinas é Satisfatório. Existe apenas um aluno com problemas comportamentais que se devem à falta de motivação e interesse escolar. No entanto no âmbito da disciplina de Matemática, o comportamento é considerado Bom. Na maioria das aulas de Matemática os alunos mostram-se interessados e motivados em participar em todas as atividades propostas, proporcionando um bom ambiente de trabalho. A professora cooperante, a Professora Inês Soares, que é professora desta turma desde o ano letivo anterior, classifica a turma como tendo um comportamento satisfatório, com exceção de dois ou três alunos, desestabilizadores da turma.

Em termos de aproveitamento, o conselho de turma declarou que a turma tem, no geral, Bom aproveitamento. No entanto, nota-se a ausência de hábitos de trabalho fora das aulas. De acordo com as pautas lançadas no primeiro período, esta turma é bastante heterogénea relativamente às avaliações e ao número de módulos feitos, apenas sete alunos não têm qualquer disciplina em atraso, sendo que oito alunos têm mais de dois módulos em atraso. Segundo a Professora Cooperante, esta é uma turma com aproveitamento satisfatório ainda que bastante heterogéneo, pois existe um grupo de alunos que demonstra interesse e empenho nas aulas e outro grupo de quatro ou cinco alunos que não se empenham nem trabalham, verificando-se o mesmo nos resultados da disciplina de Matemática.

No segundo período, a turma também se manteve bastante heterogénea em termos de aproveitamento, sendo que existe um grupo de sete alunos que, à semelhança do primeiro período, não tem qualquer módulo em atraso e dez alunos têm mais de dois módulos em atraso. Existem quatro alunos que ao longo do ano vão acumulando módulos em atraso, sendo que desses quatro alunos, dois deles tencionam abandonar a escola e ficar apenas com o 9º ano.

Relativamente à Matemática, embora não seja a disciplina onde os alunos da turma apresentam os piores resultados, são notórias as dificuldades. Nesta turma existe um grupo de três a cinco alunos, que, em certas aulas de Matemática, não participa, não acompanha e não realiza as tarefas propostas nas aulas, no entanto, a maioria dos alunos da turma tenta ultrapassar as suas dificuldades, mostrando-se bastante participativos e envolvendo-se na resolução das tarefas propostas. Para além disso, existem cerca de três a quatro alunos com aprendizagens sólidas e com hábitos de trabalho já adquiridos, que estão interessados em aprender e em participar na aula, mostrando-se bastante lineares nas suas classificações da disciplina de Matemática, nos vários módulos. Em conselho de turma, concluiu-se que este comportamento se mantém nas restantes disciplinas.

Os alunos revelaram dificuldades com a interpretação de enunciados e em operações aritméticas, verificando-se com frequência erros quando operam com frações. Num elevado número de alunos da turma são notórias as dificuldades respeitantes a tópicos lecionados no 2º e 3º ciclo.

Por fim, concluo que é uma turma com alunos que trabalham muito bem cooperativamente e que estão sentados estrategicamente de acordo com uma planta de sala, pensada pela Diretora de Turma, após as considerações do conselho de turma. Desta forma, o aluno com mais facilidade pode ajudar o colega com maior dificuldade, estimulando a sua aprendizagem. Assim, os alunos adaptam-se muito bem à realização de tarefas exploratórias a pares, como pude comprovar na prática letiva supervisionada, desenvolvida ao longo do 1º período letivo.

No 2º período, no qual realizei a minha intervenção, a turma manteve sempre a mesma postura, continuando a mostrar-se bastante envolvida na realização das tarefas propostas e na discussão das mesmas.

No conselho de turma realizado após o término do 2º período, as opiniões mantiveram-se, sendo que a turma manteve o seu comportamento Satisfatório e o seu aproveitamento como Bom. Ainda assim, ao nível das classificações obtidas no final do 2º período pelos alunos, em todas as disciplinas, verifica-se uma melhoria face ao 1º período.

Em relação às classificações finais de Matemática no módulo A3, que se refere à Estatística, e é lecionado anteriormente ao módulo A7, Probabilidades, estas encontram-se na Tabela 2. Como se pode observar, as classificações finais do módulo foram Satisfatórias, existindo oito alunos que ficaram com o módulo em atraso, pois reprovaram por terem classificação inferior a dez ou reprovaram por faltas e dez alunos (mais de metade da turma) com classificação positiva sendo que oito desses tiveram classificação igual ou superior a 14 valores.

Tabela 2: Classificações no Módulo A3 – Estatística

Classificações (Valores)	Reprovado por Faltas	< 10	10 – 13	14 – 17	18 – 20
Nº de Alunos	3	5	2	5	3

No módulo A7, Probabilidades, onde realizei a minha intervenção letiva, as classificações finais encontram-se na Tabela 3. Como se pode observar, as classificações mantiveram-se de forma Satisfatória, ainda que os resultados tenham sido ligeiramente melhores, existindo apenas cinco alunos que ficaram com o módulo em atraso, sendo que dois desses alunos não comparecem às avaliações, e treze alunos com classificação positiva, sendo que oito desses tiveram classificação igual ou superior a 14 valores.

Tabela 3: Classificações no Módulo A7 – Probabilidades

Classificações (Valores)	Reprovado por Faltas	< 10	10 – 13	14 – 17	18 – 20
Nº de Alunos	3	2	5	8	0

No geral, as classificações subiram relativamente às avaliações do módulo anterior, como podemos verificar no gráfico que se segue. No entanto, em comparação com o módulo A3, apesar de existirem mais classificações positivas, estas não foram tão altas, sendo que no módulo A7 nenhum aluno teve classificação igual ou superior a 18 valores. Na figura que se segue, é apresentado um gráfico de forma a facilitar a visualização da informação das tabelas anteriores. Verifica-se que não existe uma discrepância significativa nas classificações dos alunos em ambos os módulos.

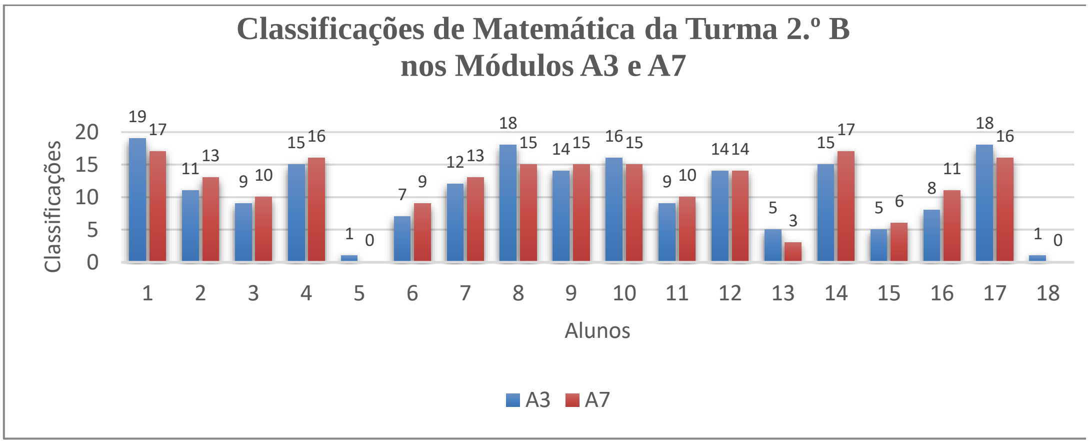


Figura 2: Classificações de Matemática da turma 2.º B nos Módulos A3 e A7

3.2. Ancoragem Unidade de Ensino

Há cerca de duas décadas que, em Portugal, a Estatística e as Probabilidades integram os programas de Matemática dos ensinos básico e secundário. O NCTM (2000) refere que as experiências, nos anos mais elementares, das Probabilidades devem ser informais. Neste ciclo, devem explorar-se diversas situações, em particular aquelas relacionadas com o dia-a-dia, que ajudem os alunos a compreender que existem acontecimentos impossíveis, prováveis e improváveis, e a apropriarem-se desse vocabulário. Nos níveis 3-5, os alunos devem aprender a quantificar a probabilidade de resultados de experiências simples e a compreender que a probabilidade de acontecimentos varia numa escala de 0 a 1. No ensino básico, sugere-se a compreensão e a utilização de terminologia adequada para descrever acontecimentos complementares e mutuamente exclusivos, bem como o cálculo de probabilidades de acontecimentos compostos simples, usando listas, Diagramas em Árvore e modelos de área. Além disso, os alunos devem usar as Probabilidades para formular e testar conjeturas acerca dos resultados de experiências e simulações. No 9.º salienta-se a necessidade de os alunos desenvolverem "a compreensão do conceito de probabilidade" (Ponte et al., 2007, p. 58). O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) e a Associação de Professores de Matemática (APM) recomendam igualmente o desenvolvimento deste conteúdo: "o estudo das Probabilidades proporciona um ambiente natural para os alunos estabelecerem conexões, entre a Matemática e as outras disciplinas escolares, e as suas experiências quotidianas" (NCTM, 2008, p. 52)Acrescentam ainda que, do 9.º ao 12º ano, "os alunos deverão aprender a identificar acontecimentos mutuamente exclusivos, complementares e condicionados, recorrendo aos seus conhecimentos sobre combinações, permutações e contagem, para calcularem as probabilidades associadas a esses acontecimentos" (NCTM, 2008, p.390).

No final da década de 1980, defendia-se que os alunos do 9ºano ao 12º ano deveriam aprofundar e ampliar as suas experiências probabilísticas experienciadas em anos anteriores, explorando conceitos de Probabilidades "tais como acontecimentos dependentes e independentes e a sua relação com acontecimentos compostos e probabilidade condicional" (NCTM, 1991, p.205).

Relativamente ao programa do ensino básico (ME, 1991), este referia que os alunos deveriam tirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de probabilidade, procurando que os alunos se familiarizassem com alguns aspetos específicos de linguagem e que utilizassem o conceito de Probabilidades para resolver problemas. Por sua vez, o programa do ensino secundário (ME, 1997) refere que o trabalho se deve iniciar pela realização de experiências aleatórias e, a partir daí, compreender o que são acontecimentos contrários, incompatíveis e independentes. Os alunos devem conhecer a lei dos grandes números e o conceito frequencista de Probabilidades e calcular a probabilidade pela Lei de Laplace. Deve ainda considerar-se a distribuição de Probabilidades, fazendo referência à curva de Gauss e à distribuição normal, e a definição de Probabilidade Condicionada.

Como é referido na Brochura de Probabilidades e Combinatória do 12º ano de escolaridade (1997), um dos conceitos mais importantes da Teoria das Probabilidades é o de Probabilidade Condicionada, que está relacionado com o facto de em muitas situações nas quais se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispor de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidades a esse acontecimento. O conceito de Probabilidade Condicionada torna-se então central para a compreensão do raciocínio probabilístico. Já Batanero (2005) defendia que, para os alunos que tomam decisões na sua vida quotidiana, é importante introduzir-se a noção de Probabilidade Condicionada enquanto base da conceção de probabilidade.

No que se refere ao ensino regular, o tema Probabilidade Condicionada está presente no Ensino Secundário, no 12º ano de Matemática A, no domínio das Probabilidades e deverá ocupar cerca de 27 aulas. O tema Probabilidade Condicionada aborda, à semelhança do que ocorre também no Ensino Profissional, a noção de Probabilidade Condicionada, acontecimentos independentes e a resolução de problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e acontecimentos independentes. Já no programa de Matemática A – Ensino Secundário (ME, 2002), anterior àquele que está atualmente em vigor, um tópico ocupava-se da Probabilidade Condicionada e independência; probabilidade de interseção de acontecimentos e acontecimentos independentes. Dessa forma, podemos verificar que o Programa do Ensino

Profissional (ME, 2004/05) continua a abordar os temas de acordo com o programa de 2002.

A importância deste tema está descrita no Programa de Matemática A do 12º ano (ME, 2002), quando este defende que o objetivo do estudo desta área deve fornecer uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica, toda a comunicação que utiliza a linguagem das Probabilidades. Considera-se ainda que o tema das Probabilidades constitui uma boa oportunidade para a introdução de uma axiomática, uma das formas de organizar uma teoria Matemática, permitindo que os estudantes tenham uma melhor compreensão do que é a atividade demonstrativa na Matemática. O Programa de Matemática A do 12º ano (ME, 2002) defende a importância de trabalhar o raciocínio matemático e as conexões Matemáticas e menos a aplicação das fórmulas, sendo este um tema privilegiado nesse aspeto. Assim, as Probabilidades têm assumido um lugar cada vez mais relevante nas propostas curriculares para o ensino da Matemática.

Torna-se então relevante uma aprendizagem significativa nesta área da Matemática, proporcionando aos alunos um desenvolvimento do raciocínio matemático e formando cidadãos com espírito crítico para uma vida ativa.

Para a unidade de ensino que decidi estudar, “Probabilidade Condicionada. Acontecimentos Independentes”, que se enquadra no tema 3, do módulo A7, Probabilidades, foi necessário estabelecer objetivos de aprendizagem específicos que me permitiram criar uma linha orientadora de ensino. Para tal, apoiei-me no Programa de Matemática para o Ensino Profissional (ME, 2004/05), no que diz respeito ao tema da Probabilidades. Segundo o Programa de Matemática para o Ensino Profissional (ME 2004/05), os objetivos de aprendizagem que se pretende que os alunos atinjam na lecionação deste módulo, no 2º ano de curso, são:

- Saber calcular a probabilidade de alguns acontecimentos a partir de modelos propostos;
- Identificar acontecimentos em espaços finitos;
- Mostrar a utilidade das Árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias;

- Ilustrar a forma de cálculo de probabilidades de acontecimentos utilizando uma Árvore de probabilidades;
- Calcular probabilidades com base na família de modelos Normal recorrendo ao uso de uma tabela da função de distribuição de uma Normal *Standard* ou, em alternativa, utilizando a calculadora.

Estes objetivos devem ser atingidos através do desenvolvimento das seguintes competências:

- Compreensão da diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório;
- Construção de modelos de probabilidade para situações simples, nos quais se admita como razoável o pressuposto de simetria ou equilíbrio;
- Apreensão das propriedades básicas de uma função massa de probabilidade;
- Compreensão da noção de Probabilidade Condicionada;
- Conhecimento das propriedades da Probabilidade e sua utilização no cálculo da probabilidade de acontecimentos;
- Conhecimento do modelo Normal ou Gaussiano e suas propriedades.

Apesar de a subunidade didática que escolhi ter apenas como competência visada o quarto e o quinto tópico anteriormente identificados, é um tema que (como na maioria dos temas da Matemática) não se encontra isolado dos temas que o antecedem. Muito pelo contrário, necessita que os alunos adquiram todas as competências anteriormente visadas. Deste modo, existem alguns conhecimentos prévios que os alunos necessitam de possuir antes serem introduzidos estes conceitos novos, para que consigam compreende-los. A Probabilidade Condicionada enquadra-se no Tema 3 do módulo, sendo que anteriormente são estudados o Tema 1 – Introdução ao Estudo das Probabilidades. Regra de Laplace: Experiência Aleatória; Espaço de Resultados; Acontecimentos; Operações com Acontecimentos; Acontecimentos Incompatíveis e Acontecimentos Contrários; Regra ou Lei de Laplace; Lei de Laplace e Regra do Produto – e o Tema 2 – Modelos de Probabilidade: Modelos de Probabilidade; Propriedades da Probabilidade; Variável Aleatória e Distribuição de Probabilidade; Valor Médio e Desvio-Padrão de uma Distribuição de Probabilidade. Desta forma, antes de ser lecionado o tema Probabilidade

Condicionada, torna-se importante que os alunos adquiram os conhecimentos básicos das Probabilidades, tais como, a Regra de Laplace, as definições de Probabilidades, as propriedades das Probabilidades, a noção de Acontecimento entre outros. No ensino profissional, tudo isso é dado no tema 1 e tema 2 do módulo das Probabilidades, ainda assim, a maioria dos alunos já se depararam com essas bases no 9º ano do ensino regular na disciplina de Matemática. No tema 3 estuda-se então a Probabilidade Condicionada, a resolução de problemas usando a Probabilidade Condicionada, a Probabilidade de Interseção e os Acontecimentos Independentes. Dado que a resolução de problemas usando a Probabilidade Condicionada é um subtópico da unidade de ensino que pretendo investigar, torna-se relevante que este seja um tema a abordar no relatório, uma vez que o programa reforça a sua importância no ensino das Probabilidades.

Em termos de planeamento, a intervenção letiva que serviu de base a este estudo decorreu no 2º período, durante nove aulas de 50 minutos, enquadrada na planificação de médio e longo prazo da professora cooperante, titular da turma. Para cada uma destas aulas, realizei um plano de aula (ver Anexos), onde constam os objetivos específicos a alcançar, os conhecimentos prévios dos alunos, as capacidades transversais a desenvolver, os recursos a utilizar, particularmente as tarefas a propor, a avaliação das aprendizagens e o desenvolvimento da aula. Neste desenvolvimento da aula, estão presentes os seus diversos momentos, os tempos previstos para cada um deles, as dificuldades previstas dos alunos e as respetivas ações da professora, para cada uma das dificuldades. No Quadro 5 apresento a planificação das nove aulas da unidade lecionada, tendo em conta os seus tópicos e subtópicos, os objetivos específicos e as tarefas propostas.

Quadro 5: Planificação da Unidade de Ensino

Aula e Data	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos	Tarefas
1.ª aula 17/02/2017	**Probabilidade Condicionada.**	Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos utilizando a noção de Probabilidade Condicionada.	**Tarefa 1:** “Probabilidade Condicionada 1: Os Sacos e as Bolas”
2.ª aula 20/02/2017	**Probabilidade Condicionada.**	Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos utilizando a noção de Probabilidade Condicionada.	**Tarefa 2:** “Probabilidade Condicionada 2: Uma Viagem até à Escola”
3.ª aula 20/02/2017	**Probabilidade Condicionada;** **Diagrama de Venn.**	Usar Diagramas de Venn para calcular a probabilidade de alguns acontecimentos envolvendo a noção de Probabilidade Condicionada.	**Tarefa 3:** “Probabilidade Condicionada 3: Que Sabor de Gelado Gostas Mais?”
4.ª aula 03/03/2017	**Probabilidade Condicionada;** **Diagramas de ÁÁrvore;** **Probabilidade de Interseção.**	Usar Diagramas de Árvore para calcular a probabilidade de acontecimentos envolvendo a noção de Probabilidade Condicionada; Calcular a probabilidade da interseção de dois acontecimentos.	**Tarefa 4:** “Probabilidade Condicionada 4: A Caixa de Bombons e o Acaso dos Cartões”
5.ª aula 06/03/2017	**Probabilidade Condicionada;** **Diagramas de ÁÁrvore;** **Probabilidade de Interseção.**	Usar Diagramas de Árvore para calcular a probabilidade de acontecimentos envolvendo a noção de Probabilidade Condicionada; Calcular a probabilidade da interseção de dois acontecimentos.	**Tarefa 4:** “Probabilidade Condicionada 4: A Caixa de Bombons e o Acaso dos Cartões”
6.ª aula 06/03/2017	**Probabilidade Condicionada;** **Acontecimentos Independentes.**	Noção de acontecimentos independentes; Resolver problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e acontecimentos independentes.	**Tarefa 5:** “Probabilidade Condicionada 5: O Lançamento da Moeda e do Dado”
7.ª aula 10/03/2017	**Probabilidade Condicionada;** **Probabilidade de Interseção;** **Acontecimentos Independentes.**	Resolver problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e a probabilidade de interseção; Resolver problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e acontecimentos independentes.	**Tarefa 6:** “Probabilidade Condicionada 6: Os Professores e o Carnaval de Torres Vedras”
8.ª aula 13/03/2017	**Probabilidade Condicionada;** **Probabilidade de Interseção;** **Acontecimentos Independentes.**	Resolver problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e a probabilidade de interseção; Resolver problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e acontecimentos independentes.	**Tarefa 7:** “Probabilidade Condicionada 7: Problemas”
9.ª aula 13/03/2017	**Probabilidade Condicionada;** **Probabilidade de Iinterseção;** **Acontecimentos Independentes.**	Resolver problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e a probabilidade de interseção; Resolver problemas envolvendo Probabilidade Condicionada e acontecimentos independentes.	**Tarefa 7:** “Probabilidade Condicionada 7: Problemas”

3.3. Conceitos Fundamentais da Unidade de Ensino

Em relação aos conteúdos trabalhados durante a minha intervenção letiva, senti necessidade de consultar várias referências, tais como, os exames nacionais de Matemática A de anos anteriores, o caderno de apoio de Matemática A do 12º ano, o manual *Matemática A7 – Probabilidade (Cursos Profissionais de Nível Secundário)*, da Lisboa Editora (Salomé, H., Silva, L., Martins A. & Dias, T. (2010)), a aula digital, da Editora Leya, o manual *Matemática A7 – Probabilidade (PerCursos Profissionais)* da Editora ASA (Magro, F., Fidalgo, F., Costa, M. & Louçano, P. (2015)), o manual e o caderno de exercícios *MACS do 11º ano – Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, da Editora Texto (Longo, E. & Branco, I.) e, com maior peso, o manual adotado pela escola *Matemática A7- Probabilidade (Ensino Profissional)*, da Porto Editora (Neves, M., Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L. & Silva, M. (2015)).

Dada a minha falta de experiência no que concerne ao Ensino Profissional, estas consultas, para além de me auxiliarem na construção das tarefas e dos *PowerPoint*, permitiram-me ter uma visão integral da unidade, das diferenças entre o programa do Ensino Profissional e o programa do Ensino Regular e os conceitos mais importantes que são estudados.

Deste modo, considero importante definir esses conceitos, com base na bibliografia que mencionei acima, dando especial relevância ao manual adotado pela escola.

Assim, os conceitos fundamentais da lecionação desta unidade de ensino são: Probabilidade Condicionada, Probabilidade de Interseção e Acontecimentos Independentes.

Probabilidade Condicionada

Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos de S.

Se $P(B) \neq 0$, então define-se probabilidade de A sabendo que B ocorreu e representa-se por $P(A|B)$ como sendo:

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

A esta probabilidade dá-se o nome de Probabilidade Condicionada.

Quando se considera a probabilidade de *A* sabendo que *B* ocorreu, o espaço de resultados passa a ser o conjunto *B* e os sucessos elementares de *A*, tendo ocorrido *B*, correspondem aos sucessos de $\mathrm{A \cap B}$.

Ao acontecimento que conhecemos à partida, que neste caso é o acontecimento *B*, chamamos acontecimento condicionante, daí que a probabilidade $P(A|B)$ se chame denomine de Probabilidade Condicionada.

Probabilidade de Interseção

Da definição de Probabilidade Condicionada, $\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$ ou $\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$, resulta imediatamente que a Probabilidade de Interseção de dois acontecimentos *A* e *B* é dada por:

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(A|B)} \text{ ou } \mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B|A)}$$

Assim, a Probabilidade de Interseção de dois acontecimentos é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, sabendo que o primeiro aconteceu.

Acontecimentos Independentes

Dois acontecimentos dizem-se independentes quando a ocorrência de um deles não tem influência na ocorrência do outro.

Seja *S* o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam *A* e *B* dois acontecimentos de *S*.

Diz-se que o acontecimento *A* é independente do acontecimento *B* se e só se $\mathbf{P(A|B) = P(A)}$ **ou** $\mathbf{P(B|A) = P(B)}$, isto, porque se *A* é independente do acontecimento *B*, então também *B* é independente do acontecimento *A*.

Se *A* e *B* são acontecimentos independentes, então temos que $P(A|B) = P(A)$, logo, pela definição de Probabilidade Condicionada, vem que $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e obtém-se $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, assim $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim, concluímos que os acontecimentos *A* e *B* são independentes se e só se a Probabilidade de Interseção dos dois acontecimentos for igual ao produto da probabilidade de cada um dos acontecimentos, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

3.4. Estratégias e Organização de Aula, Propósitos Gerais de Ensino

Através da minha intervenção letiva no primeiro período, nesta turma, com o auxílio do professor orientador e da professora cooperante, tive oportunidade de explorar algumas estratégias de ensino com a turma em questão. A unidade de ensino que lecionei comtemplou várias estratégias de ensino, integrando a realização de diferentes tipos de tarefas, dependendo dos objetivos que se pretendia alcançar em cada uma das aulas. Dada a caraterização da turma, e sendo alunos do ensino profissional, as tarefas exploratórias em contexto real foram aquelas que melhor se adaptaram, pois proporcionaram-lhes uma maior compreensão sobre a aplicabilidade do tema em questão, levando-os a interessar-se pela sua resolução. Tarefas Exploratórias são "tarefas Matemáticas valiosas com potencial para proporcionar aos alunos aprendizagens Matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos" (Canavarro, 2011, p.16). Assim, deverão ser implementadas em aulas centradas nos alunos, privilegiando um processo de aprendizagem ativo e com significado, pois tornam-se valiosas por fazerem emergir ideias Matemáticas.

O ensino exploratório destaca-se dos outros tipos de ensino devido ao papel central dos alunos no trabalho em sala de aula. Ainda assim, este ensino não advoga que os alunos aprendam sozinhos as ideias Matemáticas, nem inventem conceitos ou procedimentos (Canavarro, 2011). O papel do professor torna-se bastante exigente, uma vez que:

> A prática de ensino exploratório da Matemática exige do professor muito mais do que a identificação e seleção das tarefas para a sala de aula. A seleção de uma tarefa adequada e valiosa é muito importante pois ela tem implícita uma determinada oportunidade de aprendizagem mas, uma vez selecionada, é crucial que o professor equacione como explorar as suas potencialidades junto dos alunos e se prepare para lidar com a complexidade dessa exploração na sala de aula (Stein et al., 2008, citado em Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012, p.256).

Para que os alunos tenham a oportunidade de aprender com significado, é crucial o papel e a ação do professor, desde a escolha e adaptação criteriosa da tarefa, até à sua exploração durante a aula, de forma a ser possível atingir os objetivos previamente pensados pelo professor. Para que a aula se desenvolva da melhor forma, é importante que o professor a planeie antecipadamente, tentando prever os momentos da aula, bem como as estratégias e dificuldades que poderão surgir na resolução dos alunos. Desta forma, o professor tem a árdua tarefa de, durante a aula, gerir os tempos e o trabalho dos alunos e, principalmente, acompanhar o mesmo de forma a interpretar e compreender os seus raciocínios para originar discussões de resultados interessantes e produtivas, até, porque muitas das ideias Matemáticas e dos conceitos são, neste momento da aula, consolidados e sintetizados. Assim, o professor tem previamente a necessidade de pensar em questões que deve fazer surgir neste momento da aula e em resoluções distintas, tal como em formas de ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades, de modo a preparar esta fase, proporcionando aos alunos uma aprendizagem com significado. As tarefas usadas neste estudo foram elaboradas tendo em conta que um dos meus focos na lecionação passava por desenvolver nos alunos aprendizagens significativas, bem como o gosto pelas Probabilidades. Desta forma, tentei elaborar tarefas que evidenciassem a aplicabilidade deste tema. Em suma, considero que a preocupação principal dos professores de ser atuar para que os alunos deem sentido ao que estão a aprender, , isto para que eles encontrem na escola um local onde realmente aprendam a pensar (Schoenfeld, 1996). Ainda assim, "[o] ensino exploratório da Matemática é, pois, uma actividade complexa e considerada difícil por muitos professores." (Stein et al., 2008 citado em Canavarro, 2011). No entanto, torna-se vantajosa, pois "[o]s alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades Matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação Matemática" (Canavarro, 2011, p. 11).

Para além das tarefas exploratórias, e como um dos meus principais objetivos da lecionação passava por desenvolver nos alunos a capacidade da resolução de problemas, também recorri a problemas, dado que "[a] resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem Matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem Matemática" (NCTM, 2008, p.57). Dessa forma, em algumas tarefas que implementei, procurei privilegiar a resolução de problemas, pois esta metodologia deve ser central na aprendizagem, de tal modo que os alunos possam explorar, criar, adaptar-se a novas condições, e ativamente criar novo conhecimento no decurso das suas vidas (NCTM, 1991).

Nesse sentido, coloquei alguns problemas onde os alunos não dispunham de um algoritmo que relacionasse os dados e a incógnita ou de um processo que identificasse automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, teriam de procurar, raciocinar, interpretar e estabelecer relações (Villa & Callejo, 2006). Assim, "[a]o aprender a resolver problemas em Matemática, os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de Matemática" (NCTM, 2008, p. 57). Tal como nas tarefas exploratórias, tentei adaptar os problemas a contextos reais. Assim, considero que os alunos, em especial os de Ensino Exploratório, sentem-se mais motivados a aprender Matemática quando conseguem perceber a sua aplicabilidade e, porque "[o]s contextos dos problemas poderão variar desde experiências familiares aos alunos, relativas às suas vidas pessoais ou ao dia-a-dia escolar, até aplicações envolvendo as ciências e o mundo do trabalho. Bons problemas deverão integrar uma variedade de tópicos e envolver Matemática significativa" (NCTM, 2008, p. 57). Neste sentido, procurei diversificar os contextos dos problemas apresentados.

De forma a proporcionar variedade durante a minha lecionação, e porque as caraterísticas de cada aluno são particulares, o que origina motivações, interesses e capacidades diferentes, tentei elaborar diversos tipos de tarefas.

Através da diversidade de tarefas e de aulas de cunho exploratório, procurei proporcionar-lhes momentos de envolvimento nas atividades da aula, pelo que considero que foi muito importante para a minha investigação e conhecimento profissional, enquanto professora, pois fez emergir a relevância de se conhecer o tipo de envolvência dos alunos em cada uma delas.

O tema em questão, a Probabilidade Condicionada, é um tema no qual se pode explorar a noção de Probabilidade Condicionada, o nível do pensamento dos alunos sobre a Probabilidade Condicionada, a resolução de problemas e a manipulação algébrica. A destreza da manipulação algébrica é importante, no ensino da Matemática, pois permite aos alunos uma maior eficácia na resolução de problemas associados, neste caso, à Probabilidade. Assim, na elaboração das tarefas, coloquei como objetivo que os alunos trabalhassem a manipulação de expressões algébricas relacionadas com a Probabilidade Condicionada, como o raciocínio probabilístico, levando os alunos à resposta de questões sobre Probabilidade Condicionada apenas através da sua intuição. Desta forma, quis proporcionar aos alunos duas abordagens sobre Probabilidade Condicionada que se complementassem. Uma abordagem mais teórica, onde os alunos tinham de aplicar conhecimentos científicos e técnicas nas questões de forma a ganhar destreza na manipulação algébrica, e uma abordagem mais intuitiva, onde os alunos conseguiriam obter a probabilidade pretendida através da compreensão do espaço de resultados da experiência e utilizando a Lei de Laplace.

Na minha lecionação, pretendi que os alunos compreendessem o conceito de Probabilidade Condicionada, através de uma abordagem intuitiva à Probabilidade. Assim, era meu objetivo que os alunos fossem capazes de identificar, sem antes abordar a Probabilidade Condicionada, que um acontecimento poderia alterar o espaço amostral de um outro e, desta forma, assim, traduzir uma Probabilidade Condicionada numa probabilidade simples, após ser definido o espaço amostral. Neste sentido, procurei que os alunos, através da realização de experiências e, posteriormente, através da compreensão das mesmas, conseguissem calcular probabilidades condicionadas com base nos seus conhecimentos prévios, pelo que considero que surgiu a oportunidade de desenvolverem o raciocínio probabilístico.

No entanto, para situações que dificilmente se resolvem com recurso à intuição e através do raciocínio probabilístico, tal como por exemplo, a probabilidade de um acontecimento que ocorre depois de afetar algo que ocorreu antes, foi importante que os alunos compreendessem a definição formal de Probabilidade Condicionada e que soubessem aplicar a sua expressão algébrica. Dessa forma, após os alunos compreenderem a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada, introduzi mais facilmente outros conceitos, que os alunos entenderam melhor, tais como os conceitos de Acontecimentos Independentes e de Probabilidade de Interseção.

Nas minhas planificações das aulas, procurei que a dinâmica fosse caraterizada pela aprendizagem centrada no aluno, que, segundo Oliveira, Menezes & Canavarro (2013) apresenta-se em aulas com três fases distintas: Introdução da tarefa;

Desenvolvimento do trabalho autónomo pelos alunos (realização da tarefa); Discussão e sistematização dos resultados obtidos, típicas do Ensino Exploratório.

No primeiro momento da aula, na introdução da tarefa, a minha função, enquanto professora, passou por criar um ambiente propício à realização da tarefa de forma autónoma. Desta forma, era importante que os alunos tivessem algum tempo para lerem a mesma para que, de seguida, pudessem esclarecer possíveis dúvidas decorrentes dessa leitura, sem tirar o caráter exploratório da tarefa. Para além disso, neste momento, deveria tentar motivar-se os alunos despertando-lhes interesse em resolver a tarefa e clarificando o trabalho que iria ser desenvolvido, tanto quanto ao tempo de duração como ao método de trabalho. Por fim, também neste momento se deveria esclarecer possíveis dúvidas de conteúdos anteriores para que os alunos depois conseguissem fazer a ponte de ligação dos conhecimentos anteriores com os novos conhecimentos. Nesse momento, era importante criar todas as condições para que se procedesse ao trabalho autónomo de forma a garantir que todos os alunos iniciassem a realização da tarefa de forma esclarecida.

O segundo momento, não menos importante, foi o momento de realização da tarefa, no qual o meu papel se resumiu a monitorizar e a recolher informações. Quando a professora circula pela sala deve monitorizar o trabalho dos alunos, isto é, esclarecer dúvidas e, em simultâneo, certificar-se que todos os alunos estão a conseguir progredir na tarefa. Caso isto não aconteça, após perceber a dificuldade dos alunos, a professora deve questioná-los de forma a conduzi-los à resposta da sua dúvida sem retirar o cariz de descoberta do problema ou da questão. Assim, enquanto circula pela sala, deve também recolher informação dos alunos, percebendo eventuais dúvidas para serem esclarecidas em grupo turma e verificando as diferentes estratégias de resolução que vão surgindo, de forma a tentar enriquecer ao máximo o último momento da aula. Este momento de recolha é fulcral para preparar o momento que se segue, de forma a tentar garantir que os objetivos da aula são atingidos da melhor forma. Relativamente ao papel dos alunos, este é um momento no qual eles trabalham a pares cooperativamente, discutindo as suas dúvidas, estratégias e raciocínios. Desta forma, os alunos têm oportunidade de desenvolver inúmeras capacidades transversais e progredir nas suas aprendizagens, aprofundando os seus conhecimentos com o auxílio de um colega. Desta forma, torna-se muito mais vantajoso aprender pela descoberta do que pela transmissão dos conhecimentos do professor. Cabe assim ao aluno construir o seu próprio saber, sendo o professor o seu guia nessa aprendizagem.

O último momento e, para mim, o momento mais importante e marcante para as aprendizagens dos alunos é o de discussão e sistematização de resultados, que é realizado em grupo turma e de acordo com o trabalho anteriormente realizado. Nesse momento, o meu papel é o de moderadora, pois tenho de criar condições para que surja uma discussão dinâmica e guiá-las. Nesta fase da aula, os alunos participam ativamente na correção da tarefa, debatem os seus raciocínios e exploram as questões de forma mais detalhada. Desta forma, os alunos enriquecem os seus conhecimentos, alargam as estratégias de resolução de problemas, identificam e corrigem erros ganhando autoconfiança e explicam à turma como é que pensaram, fundamentando as suas estratégias. Este momento é favorável para desenvolver a capacidade de os alunos comunicarem matematicamente, refletirem sobre as suas formulações e o seu poder de argumentação (Santos, 2008). Para terminar a aula, a função da professora passa por ajudar os alunos a sistematizar as suas aprendizagens de forma a tentar garantir que os objetivos sejam cumpridos, bem como deve tentar certificar-se que todas as dúvidas foram esclarecidas, evitando que estas se mantenham para a aula seguinte. Um outro método, que é, por vezes utilizado, é o método do questionamento. Para finalizar a aula, a professora faz algumas questões com o propósito de verificar se os novos conhecimentos foram aprendidos e de forma a envolver os alunos e motivá-los a terem uma participação ativa na discussão em grupo turma. Essas questões são solicitadas a um aluno específico ou ao grupo turma. Ao questionar os alunos sobre o tema da aula, verificou-se que eles estavam cientes das dificuldades que ainda manifestavam, bem como se os conteúdos tinham ficado consolidados ou não. Para além disso, pode-se ainda solicitar aos alunos que formulem questões a outros, proporcionando-lhes um momento iterativo, participativo e interessante, que os motiva, claramente, para a aprendizagem, visto que os alunos veem isso como se fosse um "jogo", sendo que o vencedor é aquele que responde corretamente. Por fim, no término das aulas deve existir sempre um momento, no qual se apresentam os conceitos envolvidos, bem como algumas definições e fórmulas em forma de síntese.

Relativamente à organização do trabalho em contexto de sala de aula, mantive quase sempre o mesmo método. Os alunos trabalharam a pares, preferencialmente com o colega de mesa, de forma a garantir a heterogeneidade dos grupos. A disposição dos alunos foi feita pela diretora de turma, de acordo com as indicações dadas pelos restantes professores da turma, em conselho de turma. Assim, a diretora de turma elaborou uma planta da sala, que garantia a heterogeneidade dos pares de alunos, de forma a estimular a entreajuda, a cooperação e um trabalho colaborativo, e de forma a garantir o melhor ambiente de trabalho possível. Este método de trabalho privilegia claramente a comunicação Matemática entre os pares e a capacidade de argumentar, bem como a transmissão das suas ideias de forma percetível.

Ainda sobre o meu papel, também procurei ainda diversificar nos materiais utilizados, tendo selecionado e adaptados sete tarefas nas quais tive em consideração o meio envolvente, bem como os interesses dos alunos, de forma a motivá-los para a sua resolução. Paralelamente, solicitei a consulta do manual escolar, utilizei um programa computacional em duas aulas, o Excel, e ainda utilizei materiais manipuláveis, tais como dados, moedas, bolas e papéis.

A longo da minha intervenção letiva, abordei a Probabilidade Condicionada com tarefas diversificadas, porque considero que os alunos, quando compreendem com significado um conceito, têm de saber adaptá-lo nas diversas situações e, porque, também, considero que os alunos têm de se familiarizar com as diferentes formas de representar probabilidades.

O método de ensino intuitivo tem como objetivo principal mudar a forma como o ensino têm vindo a ser tratado, substituindo o método tradicional de ensino por um novo método "concreto, racional e ativo, denominado ensino pelo aspecto, lições de coisas ou ensino intuitivo" (Valdemarim, 2001, p. 158). As primeiras experiências de aprendizagens através do contato com objeto seguindo-se do conteúdo do objeto observado, permite uma atividade mental. Deste modo, proporciona-se aos alunos uma aprendizagem que decorre do particular, ou seja, de uma experiência para o geral, do concreto experienciado para os conceitos abstratos. Assim, o ensino que privilegia uma abordagem intuitiva está fundamentado pela observação de factos e experiências. Torna-se importante que nas minhas aulas sejam proporcionadas situações de aprendizagem, nas quais o conhecimento surja do trabalho do aluno, daí que os materiais manipuláveis se tornem elementos didáticos muito importantes para o ensino.

No que se refere às vantagens da utilização de materiais manipuláveis para a aprendizagem, Lima, Bezerra e Valverde (2016) referem que:

- Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade e aproveita o seu potencial;
- Possibilita o desenvolvimento da perceção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor;
- Contribui para a descoberta das relações Matemáticas;
- É motivador, pois atribui um sentido ao ensino da Matemática. O conteúdo passa a ter um significado diferente;
- Facilita a internalização das relações percebidas.

A utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem das Probabilidades, tal como nas restantes áreas da Matemática, permite aos alunos envolverem-se nas atividades, despertando-lhes interesse sobre o assunto e muitas vezes demonstrando um melhor aproveitamento nessas aulas. No que diz respeito ao ensino das Probabilidades, proporciona aos alunos uma melhor perceção da definição frequencista de Probabilidade, atribuindo-lhe um significado mais percetível.

Deste modo, tendo em conta que eram alunos do Ensino Profissional, tentei criar tarefas com cariz mais prático de forma a tentar fomentar o gosto pela Matemática e pelas Probabilidades, bem como a mostrar-lhes a sua aplicabilidade. Tentei evitar que as minhas aulas tivessem um caráter expositivo, procurando aulas centradas nos alunos. Quando utilizei o *PowerPoint* como recurso, tentei que os alunos tivessem sempre uma participação ativa de forma a chegarem às conclusões autonomamente, sendo o *PowerPoint* uma forma de os guiar e de sintetizar as suas aprendizagens. Com a utilização deste recurso, poupei tempo de escrita e melhorei o rigor dos gráficos e das tabelas apresentadas uma vez que já as trazia desenhadas. Para além disto, a informação aparece pela ordem que quero, com o devido rigor e de forma animada, o que evidencia aspetos cuja a informação estática apresentada no livro não evidenciava.

Por fim, nesta metodologia de ensino, realça-se o papel fundamental do professor na condução da aula, competindo-lhe selecionar as tarefas que pretende desenvolver, orientar a comunicação e organizar o trabalho na sala de aula. Deste modo, a prática dos professores e as decisões que tomam influenciam de forma determinante a qualidade das aprendizagens dos alunos. (Ponte, 2005) Através desta metodologia de ensino, proporciona-se ao aluno um momento de aprendizagem significativa, que o leva à compreensão dos conteúdos, construindo os novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios. Por vezes, no início de cada aula, existiu um momento de breve revisão dos conteúdos anteriores, para que os alunos os recordassem e articulassem com os novos conhecimentos que iriam aprender.

3.5. Tarefas

Tal como já referi anteriormente apliquei uma tarefa em cada aula, mas, ainda assim, houve aulas consecutivas que se desenrolaram em torno da mesma, dada a extensão da mesma. Elaborei sete tarefas, a primeira intitulada de "Probabilidade Condicionada 1: Os Sacos e as Bolas", a segunda de "Probabilidade Condicionada 2: Uma Viagem até à Escola", a terceira de "Probabilidade Condicionada 3: Que Sabor de Gelado Gostas Mais?", a quarta de "Probabilidade Condicionada 4: A Caixa de Bombons e o Acaso dos Cartões", a quinta de "Probabilidade Condicionada 5: O Lançamento do Dado e da Moeda", a sexta de "Probabilidade Condicionada 6: Os Professores e o Carnaval de Torres Vedras" e, por último, a sétima tarefa intitulada "Probabilidade Condicionada 7: Problemas" (Ver anexos).

Todas elas foram retiradas e adaptadas de diversos manuais, de acordo com o contexto da turma, e de forma a desenvolverem os novos conceitos em simultâneo com as capacidades transversais, como por exemplo, o raciocínio probabilístico e a resolução de problemas. As tarefas são um elemento fundamental na aprendizagem da Matemática visto que determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem que o professor proporciona aos alunos. No ensino onde as tarefas são aplicadas ao invés da exposição da matéria, com o intuito da aprendizagem pela descoberta, segundo Ponte (2005), a sua principal caraterística é que não cabe ao professor explicar tudo, mas sim deixar uma parte importante desse trabalho para os alunos, de forma a permitir que eles descubram e construam o seu conhecimento. Não desvalorizando o papel importantíssimo do professor, as aulas passam a ser mais centradas nos alunos e no "ensino-aprendizagem". Ao professor cabe o enorme desafio de elaborar tarefas específicas com os objetivos que pretende atingir para uma determinada aula e, durante a aula, monitorizar e conduzir o trabalho dos alunos, bem como fomentar e proporcionar momentos valiosos na fase de discussão e sistematização das aprendizagens. Tal como defende Ponte (2005), a aprendizagem dos alunos não passa tanto pelas atividades práticas que realizaram, mas sim pela "reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou".

> É preciso que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática (Ponte, 2005, p.18).

Deste modo, e de forma a otimizar o tempo das aulas, tentei elaborar tarefas tendo em conta a gestão da aula sem desperdício de tempo, proporcionando um ambiente estimulante para a aprendizagem dos alunos.

O meu objetivo geral com estas tarefas foi, para além de proporcionar aos alunos um momento de aprendizagem significativa, passou por levá-los a mostrar qual a compreensão que evidenciam da noção de Probabilidade Condicionada, bem como as dificuldades que manifestam na sua aplicação na resolução de tarefas que a envolvem (tarefas exploratórias e problemas).

Não obstante, para tentar garantir que todos os alunos compreendem os conceitos envolvidos em toda a unidade de ensino, tais como, Probabilidade Condicionada, Probabilidade de Interseção e Acontecimentos Independentes, elaborei tarefas de natureza diversa, como referi anteriormente. Os problemas para levar os alunos a aprenderem um conceito através da descoberta, e em contextos de situações reais, os exercícios de aplicação, pois permitem aos alunos aplicar conhecimentos recentemente adquiridos, os exercícios de revisão, que permitem aos alunos rever conteúdos já lecionados e perceber se ainda existem dúvidas e, por último, tarefas com a realização de experiências que permitem aos alunos realizar a experiência descrita e compreender a probabilidade pedida. Tal como defendia Ponte (2005), esta diversificação da natureza das tarefas desempenha um papel importante, pois permite alcançar objetivos curriculares diferentes.

Deste modo, em cada aula, a tarefa teve um objetivo diferente recorrendo a tarefas exploratórias, problemas e exercícios.

Tarefa "Probabilidade Condicionada 1: Os Sacos e as Bolas"

A primeira tarefa "Probabilidade Condicionada 1: Os Sacos e as Bolas", tal como o nome indica, foi uma tarefa que incluiu uma experiência com sacos e bolas.

Para a realização desta tarefa foi necessário formar grupos de maiores dimensões, com cerca de três ou quatro alunos, dada a disponibilidade dos materiais manipuláveis. Esta tarefa teve como objetivo levar os alunos a mostrar a sua noção intuitiva do conceito de Probabilidade Condicionada e serviu como se de uma ficha diagnóstica se tratasse. Para além disso, foi o ponto de partida para chegar à definição formal de Probabilidade Condicionada, através da experiência realizada.

Esta tarefa é constituída por apenas uma questão com duas alíneas, sendo que a primeira tinha como objetivo que os alunos indicassem um valor de uma Probabilidade Condicionada, sem envolver esse conceito diretamente, e explicassem o seu raciocínio.

Por sua vez, a segunda e última alínea tinha como objetivo que os alunos realizassem a experiência descrita, calculassem a probabilidade pedida através dos resultados da experiência e, por último, relacionassem o valor obtido com o valor que tinham respondido na alínea anterior. Desta forma, os alunos reviam o conceito frequencista de probabilidade e a Regra de Laplace e a tarefa servia como base para introduzir a definição formal do conceito de Probabilidade Condicionada.

Tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma Viagem até à Escola"

Esta tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma Viagem até à Escola" foi a segunda que apliquei com o intuito de calcular probabilidades condicionadas, com os dados dos alunos da turma, sem recorrer à fórmula da Probabilidade Condicionada, mas sim à compreensão da noção da mesma. Desta forma, esta tarefa tinha como objetivo mostrar aos alunos a aplicabilidade do conceito de Probabilidade Condicionada num contexto que lhes era familiar, pelo que proporcionava aos alunos um momento para que eles pudessem recolher e organizar dados reais relacionados com as suas vivências.

A tarefa era composta por uma única questão com três alíneas. A primeira alínea pretendia que os alunos recolhessem os dados dos alunos da turma. A seguinte alínea tinha como objetivo que os alunos organizassem os dados recolhidos e calculassem o valor da probabilidade pedida, utilizando a fórmula da Probabilidade Condicionada, ou como é mais expectável, com o auxílio da tabela através da compreensão da probabilidade requerida. Através desta alínea, os alunos não só trabalhavam a noção da Probabilidade Condicionada, como também se aperceberiam da importância da organização dos dados, neste caso, com o auxílio de uma tabela.

Por fim, na última alínea, pretendia-se que os alunos calculassem uma Probabilidade Condicionada, de acordo com os dados recolhidos, sem recorrerem à fórmula da Probabilidade Condicionada, recorrendo apenas à compreensão, no contexto da situação, da probabilidade pedida, justificando os casos possíveis e os casos favoráveis. Esta alínea promovia a interpretação simbólica da probabilidade pretendida e também podia ser utilizada de forma a rever a Regra de Laplace. Este tipo de questões é bastante usual nos exames nacionais de Matemática A, pois, através dela, dá para perceber se os alunos compreenderam ou não o conceito de Probabilidade Condicionada sem recorrer à utilização da fórmula, que pode apenas ser memorizada, sem ser compreendida.

Tarefa "Probabilidade Condicionada 3: Que Sabor de Gelado Gostas Mais?"

A tarefa "Probabilidade Condicionada 3: Que Sabor de Gelado Gostas Mais?" foi a terceira que apliquei, sendo composta por exercícios que requeriam que os alunos recolhessem, organizassem e interpretassem dados, levando os alunos a compreender a aplicabilidade dos conceitos envolvidos. Para além disto, com esta tarefa, pretendia-se mostrar aos alunos a aplicabilidade do Diagrama de Venn na resolução de problemas envolvendo a noção de Probabilidade Condicionada.

Esta tarefa era constituída por duas questões, sendo que cada uma delas era constituída por várias alíneas. A segunda questão era a extensão da tarefa. O objetivo da primeira questão passava por como já referi anteriormente, que os alunos recolhessem, organizassem e interpretassem os dados obtidos. Na primeira alínea desta tarefa, pretendia-se que os alunos recordassem o Diagrama de Venn, para depois compreenderem a sua utilidade no cálculo de uma Probabilidade Condicionada. A segunda alínea era um exercício de aplicação, onde os alunos tinham de indicar o valor de uma probabilidade simples, de uma Probabilidade Condicionada e de uma probabilidade de interseção de dois acontecimentos. A terceira alínea tinha como objetivo que os alunos comparassem o valor de uma probabilidade com uma alteração nos dados, alertando os alunos para a importância do número de casos possíveis, no cálculo de uma Probabilidade Condicionada. A última alínea tinha como principal objetivo a manipulação da fórmula da Probabilidade Condicionada.

Na questão 2, o objetivo era, tal como na questão 1, que os alunos organizassem os dados e calculassem o valor de duas probabilidades, sendo uma delas uma Probabilidade Condicionada. Neste exercício, era expectável que os alunos utilizassem um Diagrama de Venn de forma a facilitar a leitura dos dados, por ser a extensão da tarefa. Deste modo, esta alínea tinha como intuito mostrar que o Diagrama de Venn podia ser feito com o cardinal dos acontecimentos ou com os valores das probabilidades dos acontecimentos.

Tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A Caixa de Bombons e o Acaso dos Cartões"

A quarta tarefa, "Probabilidade Condicionada 4: A Caixa de Bombons e o Acaso dos Cartões", tinha como principais objetivos a compreensão da utilidade dos Diagramas de Árvore na resolução de problemas envolvendo a noção de Probabilidade Condicionada, bem como a exploração da noção da probabilidade de interseção de dois acontecimentos através da noção de Probabilidade Condicionada.

Esta tarefa era composta por duas questões. Na primeira alínea da primeira questão, pretendia-se que os alunos interpretassem o enunciado transcrevendo a situação num Diagrama de Árvore. A segunda alínea tinha como objetivo que os alunos interpretassem o Diagrama de Árvore e retirassem os valores para calcularem as probabilidades pedidas, sendo que duas delas eram probabilidades condicionadas. Deste modo, pretendia-se que os alunos compreendessem que o valor das probabilidades colocadas nos segundos ramos eram valores de probabilidades condicionadas. O objetivo da última alínea, da primeira questão, era que os alunos distinguissem uma Probabilidade Condicionada da sua transposta, dizendo o valor lógico de uma afirmação e justificando esse valor. Nesta última questão, pretendia-se que os alunos distinguissem essas probabilidades através do cálculo do valor de cada uma delas.

Na segunda questão, o objetivo da primeira alínea passava por calcular uma probabilidade simples, ainda assim, para este caso, era importante que os alunos organizassem os dados num Diagrama de Árvore e concluíssem que a probabilidade de interseção de dois acontecimentos era o produto do valor das probabilidades dos ramos correspondentes a esses acontecimentos e, portanto, que o valor da probabilidade de interseção era igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, sabendo que o primeiro tinha acontecido. Na segunda alínea, o objetivo era semelhante ao da alínea anterior, ainda que o Diagrama de Árvore passasse a ter três ramos, ou seja, passasse de uma experiência de duas extrações para três. Por fim, o objetivo da última alínea era a manipulação algébrica da fórmula da Probabilidade Condicionada, com o auxílio do Diagrama de Árvore.

Tarefa "Probabilidade Condicionada 5: O Lançamento da Moeda e do Dado"

A tarefa "Probabilidade Condicionada 5: O Lançamento da Moeda e do Dado" foi a quinta tarefa que apliquei. Tinha como objetivos a compreensão da noção de Acontecimentos Independentes, bem como a resolução de problemas envolvendo Acontecimentos Independentes e Probabilidade Condicionada.

Esta tarefa era composta por apenas uma questão com três alíneas. Na primeira alínea pretendia-se que os alunos, em grupo, realizassem a experiência descrita e organizassem os resultados obtidos numa tabela. A segunda alínea tinha como objetivo que os alunos calculassem o valor da probabilidade de dois acontecimentos simples, da probabilidade de intersecção dos dois acontecimentos e, por fim, o valor do produto das probabilidades dos acontecimentos simples.

Por fim, a última questão tinha como principal objetivo que os alunos comparassem os resultados obtidos na alínea anterior e que concluíssem que o valor do produto das probabilidades dos acontecimentos simples era, aproximadamente, igual ao valor da probabilidade de intersecção dos dois acontecimentos. Assim, em discussão, conseguir-se-ia sistematizar que isto acontecia, se e só se os acontecimentos fossem independentes.

Tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os Professores e o Carnaval de Torres Vedras"

A sexta tarefa, "Probabilidade Condicionada 6: Os Professores e o Carnaval de Torres", para além de ser constituída por exercícios de aplicação, tinha como objetivo alertar os alunos para a distinção de uma experiência com e sem reposição. Era uma tarefa que envolvia todos os conceitos trabalhados nesta unidade de ensino, Probabilidade Condicionada, Probabilidade de Interseção e Acontecimentos Independentes, bem como alguns conhecimentos prévios. Tinha na sua composição apenas duas questões.

A primeira questão era um exercício de aplicação e de revisões, pois tinha como objetivo o cálculo de probabilidades, simples e compostas (condicionada e interseção), através da interpretação dos dados que estavam organizados numa tabela.

A segunda questão era já do tipo problema. Na primeira alínea. o objetivo passa pelos alunos calcularem uma probabilidade simples para tentar certificarem que todos eles tinham compreendido o enunciado e a experiência descrita. A segunda alínea tinha como objetivo a distinção do valor da mesma probabilidade, mas em situações distintas, numa com e noutra sem reposição. Por último, na terceira alínea, pretendia-se que os alunos resolvessem o problema proposto com o auxílio dos cálculos e das representações que tinham realizado nas alíneas anteriores. Nesta questão, como descreve uma experiência com extrações de bolas, pretendia-se que os alunos recorressem a um Diagrama de Árvore para calcular as probabilidades de interseção pretendidas.

Tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas"

A tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas" foi a última que apliquei e, tal como o nome indica, era de resolução de problemas de Probabilidade Condicionada. Tinha como objetivos mobilizar os conhecimentos sobre Probabilidade Condicionada, Probabilidade de Interseção e Acontecimentos Independentes e utilizálos na resolução de problemas. Nesta tarefa, o objetivo comum a todos os problemas era que os alunos conseguissem aplicar os conhecimentos adquiridos na unidade de ensino e interpretar os resultados obtidos, em cada problema, no contexto das Probabilidades, exigindo espirito crítico.

Esta tarefa era constituída por quatro questões. A primeira tinha como objetivo mobilizar o conhecimento sobre o cálculo de probabilidades simples e compostas, através de um Diagrama de Venn, requerendo, para além disto, alguma manipulação algébrica. Para além de ser expectável o uso do Diagrama de Venn, pela forma como os dados estavam apresentados, o enunciado não pedia ao aluno que o fizesse. Desta forma, a resolução de problemas era uma capacidade transversal que se pretendia que fosse desenvolvida.

A segunda questão pretendia alertar para um erro bastante comum quando nos referimos ao tema Probabilidade Condicionada, como já vimos anteriormente em estudos realizados, para a falácia da inversão do eixo temporal. Desta forma, era pedida uma Probabilidade Condicionada, na qual o aluno sabia o que sucedia depois e pretendia calcular a probabilidade de certo acontecimento ocorrer antes. Esta questão também era um problema que não pedia aos alunos, mas que um Diagrama de Árvore facilitava bastante a sua compreensão. O objetivo deste exercício era a manipulação algébrica da fórmula da Probabilidade Condicionada e o cálculo de uma probabilidade de interseção, sendo importante referir aos alunos a possibilidade de calcular a probabilidade de um acontecimento ocorrer sabendo o que tinha acontecido de seguida.

A questão 3 era um exercício de revisão onde se pretendia que os alunos calculassem probabilidades condicionadas e probabilidades de interseção de dois acontecimentos, através dos dados de uma tabela. Ainda assim, eram pedidas probabilidades transpostas de forma a relembrar os alunos que o valor de uma probabilidade era diferente do valor da sua probabilidade transposta.

Por último, a questão tinha como principal objetivo os alunos mobilizarem os conhecimentos sobre acontecimentos independentes. Desta forma, através dos dados de uma tabela, pretendia-se que os alunos averiguassem se os acontecimentos eram ou não independentes, utilizando o teorema abordado.

3.6. Avaliação das Aprendizagens

A avaliação das aprendizagens é um elemento formativo e regulador do ensino e deve ser vista como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, pois apoia a aprendizagem continuada dos alunos e fornece informações úteis para os professores e alunos. De acordo com o NCTM (2008, p. 23), "a avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma Matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores, quer para os alunos". Deste modo, a avaliação deve:

> fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino-aprendizagem. Neste contexto, é necessária uma avaliação continuada posta ao serviço da gestão curricular de carácter formativo e regulador (Ponte et al., 2007, p.12).

A avaliação é feita através do processo de recolha de informação acerca daquilo que os alunos sabem e são capazes de fazer em diversas situações. Quando se fala em avaliação das aprendizagens dos alunos, uma grande parte das pessoas associa esse processo à aplicação dos testes sumativos com alguma regularidade de forma a classificar as aprendizagens dos alunos, embora, ainda assim, estes não sejam a única forma de avaliação existente.

De acordo com a finalidade que se pretende atingir, existem três tipos de avaliação: a avaliação diagnóstica, que tem como principal função a orientação, a avaliação reguladora, que, tal como o próprio nome indica, permite a regulação das aprendizagens e, por último, a avaliação sumativa, que tem como objetivo a certificação das aprendizagens realizadas pelos alunos.

Neste sentido, irei falar sobre os instrumentos de avaliação que utilizei ao longo da minha intervenção letiva dada a sua importância no processo de ensino e aprendizagem.

De forma a iniciar a minha intervenção, a avaliação diagnóstica que realizei, foi feita com recurso à observação das aulas anteriores à minha intervenção, bem como à aplicação da minha primeira tarefa, que tinha como objetivo compreender a noção intuitiva que os alunos já possuíam acerca do conceito de Probabilidade Condicionada. O início do módulo de Probabilidades já fazia alguma revisão à matéria que os alunos tinham aprendido no Ensino Básico, pelo que esse acompanhamento já me permitiu recolher informações sobre as dificuldades, os interesses e os conhecimentos dos alunos. Esses elementos permitiram-me realizar tarefas e organizar as aulas de acordo com essas necessidades de forma a tentar otimizar o processo de ensino e aprendizagem.

No que se refere à avaliação reguladora, esta está associada ao fornecimento de *feedback* aos alunos, respeitante ao progresso das suas aprendizagens. O *feedback* é um requisito obrigatório para haver progresso nas aprendizagens dos alunos (Fernandes, 2005) e é uma condição necessária à regulação das aprendizagens (NCTM, 1999). Este tipo de avaliação valoriza não só o resultado final, como também o processo de aprendizagem dos alunos e, dessa forma, permite-lhes desenvolverem uma postura reflexiva sobre o seu trabalho. É importante que este processo de avaliação seja contínuo e bastante regular, pelo que forneci *feedback* tanto descritivo das resoluções das tarefas, de aula para aula, como *feedback* oral ao longo dos momentos de trabalho autónomo com o intuito de promover e incentivar as reflexões dos próprios alunos.

A avaliação sumativa, na qual se estabelece o balanço das aprendizagens e se classificam os resultados dessa aprendizagem, foi realizada através da recolha das resoluções das tarefas realizadas, em aula, pelos alunos e com um teste sumativo que os alunos efetuaram no fim da unidade de ensino que lecionei.

Para além disto, considerei outras componentes: as intervenções dos alunos durante as aulas, o seu comportamento, as respostas que deram às questões que fui colocando, o seu interesse e a participação nas aulas (avaliação sumativa e formativa). Deste modo, após cada aula, preenchi uma tabela, na qual atribuí classificação a cada uma destas componentes a alguns alunos. Ainda durante a aula, fui dando *feedback* a alguns alunos para que pudessem melhorar certos aspetos de forma a otimizar as suas aprendizagens.

Ao longo das aulas, fiz uma avaliação contínua formativa tendo em conta as minhas notas de campo, as minhas observações e as resoluções da tarefa de forma a adaptar as aulas seguintes às dificuldades de aprendizagem sentidas pelos alunos. Este processo de avaliação teve também como objetivo ser um auxílio para a minha prática letiva, de modo que, através das reflexões após cada aula que lecionei, permitiu-me tentar melhorar alguns aspetos na minha intervenção seguinte, bem como adaptar as tarefas às dificuldades que os alunos sentiam e que eu desejava que ultrapassassem.

3.7. Aulas Lecionadas

As nove aulas que lecionei decorreram de 17 de fevereiro a 13 de março de 2017. Cada aula teve a duração de 50 minutos, sendo que algumas delas foram lecionadas em horas consecutivas no mesmo dia.

Todas as aulas foram iniciadas com a revisão e relembrança de tópicos trabalhados na aula anterior, de forma a fazer a ponte de ligação com a matéria que iria ser lecionada nessa aula. Por vezes tiveram também início com algumas questões introdutórias sobre o tema da aula, procurando gerar algum debate e proporcionando aos alunos interesse sobre a matéria nova, ou, até mesmo, com a distribuição da tarefa que iria ser realizada. Neste caso, distribuía apenas uma tarefa por cada par de alunos de forma a tentar garantir que trabalhavam cooperativamente. As tarefas que distribui tinham sempre algum espaço em cada questão para a sua resolução, de forma a permitir-me recolher as resoluções dos alunos no final de cada aula. Os alunos mostraram-se sempre interessados e aderiram bem a todas as tarefas propostas.

Relativamente à pontualidade e assiduidade dos alunos, posso considerar que eram pontuais e assíduos, com exceção das aulas que eram lecionadas na primeira hora do horário escolar. Os alunos que dependiam de transportes públicos para chegar à escola, chegavam sempre entre 10 a 15 minutos atrasados à primeira hora devido à incompatibilidade entre o horário desses autocarros com o horário escolar, o que, por vezes, transtornava um pouco o início da aula.

Desta forma, para otimizar o restante tempo da aula, quanto mais detalhado fosse o plano de aula e quanto mais pensado e refletido fosse o trabalho de preparação, maior capacidade teria o professor para ajustar esse plano em função dos acontecimentos, podendo mais facilmente recorrer ao improviso. Não basta uma boa tarefa para originar uma boa aula, pois isso depende de muitos fatores que passam pela boa preparação do professor, pela sua capacidade de resposta a situações inesperadas, entre outros (Ponte, Quaresma & Pereira, 2015). Assim, uma boa planificação de aula, complementada com uma boa tarefa, pode ser meio caminho para atingir o sucesso de uma boa aula.

Deste modo, planeei pormenorizadamente cada aula com cuidado, definindo os objetivos que pretendia alcançar com a realização e discussão das tarefas, sendo que para cada uma das tarefas previ algumas estratégias de resolução dos alunos, tentei antecipar as dificuldades que poderiam surgir, bem como a forma de atuar perante cada uma delas, permitindo-me dar-lhes uma resposta mais rapidamente.

1ª Aula (17 de fevereiro de 2017)

Esta aula teve quatro grandes momentos: a introdução da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos na realização da mesma, a discussão coletiva sobre o trabalho autónomo e a sistematização dos resultados obtidos.

Antes da aula começar, distribui os enunciados das tarefas, bem como os materiais necessários de forma a não ocupar tempo útil da aula. À medida que os alunos iam entrando, deparavam-se com este cenário, tendo sido notória a sua motivação e a curiosidade imediata que os materiais lhes proporcionaram. Na primeira fase da aula, expliquei a experiência que a tarefa propunha, invocando dois alunos para a exemplificar. Tal momento prolongou-se mais do que aquilo que estava previso, pois os alunos chegaram atrasados à aula, visto ser a primeira aula do dia.

No momento de trabalho autónomo, enquanto circulava pela sala, apercebi-me que a apresentação da tarefa não tinha clarificado os alunos. Apesar de ter referido que a execução da experiência era apenas para a segunda alínea, e de isso estar explícito no enunciado, não reforcei esse aspeto e os alunos começaram por executar a experiência na primeira alínea, onde apenas se pretendia que dissessem o valor da probabilidade pedida. Para além disso, na exemplificação da experiência, quis exemplificar apenas a forma como se efetuava a extração de uma bola do saco, para garantir a aleatoriedade, não tendo referido que a experiência consistia em, inicialmente, retirar uma bola com o número ímpar do saco, pois essa era a condição conhecida da Probabilidade Condicionada que se pretendia calcular. Dessa forma, decidi interromper esse momento e clarificar a tarefa em grupo turma. Mais uma vez, ao longo do trabalho autónomo, foi notório, em geral, o interesse, o empenho e o entusiasmo dos alunos.

Assim, considero que o primeiro momento da aula não foi bem executado, mas, através disso, fiquei a conhecer a sua importância para um bom decorrer da aula. Portanto, concluo que a introdução da tarefa é um momento onde preciso de melhorar as minhas intervenções.

Na discussão dos resultados obtidos, a primeira alínea da tarefa não levantou grandes dúvidas, pois todos os grupos, à exceção de um, responderam acertadamente. No entanto, ao longo do trabalho autónomo, os grupos apresentaram dificuldades no cálculo dessa probabilidade. Todavia, como eram apenas cincos grupos, fui clarificando essas dúvidas através de algum questionamento, levando-os a obter o valor certo. Para discutir os resultados da segunda alínea, auxiliei-me de um Excel previamente preparado, o que me poupou algum tempo. Inseri os resultados de todos os grupos no Excel, que, autonomamente, calculou a probabilidade obtida pela turma, juntando as experiências dos cinco grupos. Por fim, questionei os alunos sobre os dados obtidos, o que nos permitiu concluir, em grupo turma, que a probabilidade obtida pela junção das experiências era bastante próxima da probabilidade calculada na alínea anterior. Neste momento, aproveitei para rever a definição frequencista do conceito de probabilidade, ou seja, que apesar de dois grupos terem obtido valores dispersos do real valor, com o aumento do número de experiências, o valor da probabilidade obtida tendia para o seu valor teórico (valor obtido na alínea a).

Após a discussão dos resultados, sistematizei as aprendizagens através da apresentação de um *PowerPoint*, onde introduzi a fórmula da Probabilidade Condicionada e explorei, com a turma, o seu significado através de uma noção intuitiva. De seguida, retomei a experiência e questionei os alunos para chegarem ao valor da probabilidade da primeira alínea utilizando a fórmula.

Para consolidar as aprendizagens, realizei questões acerca da tarefa, como se de uma extensão da tarefa se tratasse, e ainda solicitei a alguns alunos que questionassem outros colegas sobre questões relacionadas com probabilidades, incluindo probabilidades condicionadas, acerca da tarefa. Os alunos rapidamente interiorizaram isso como um jogo em que ganhava aquele que respondesse bem, tendo sido, portanto, um momento bastante enriquecedor. Neste momento, surgiram questões muito interessantes, que destaco, entre as quais: "Qual é a probabilidade de a bola ser branca ou laranja sabendo que tem um número menor do que 11?", que não consegui prever. Ainda assim, aproveitei essas questões para reforçar as aprendizagens e consegui perceber se o conceito tinha sido compreendido pelos alunos.

Penso que a tarefa foi bastante bem-sucedida, dando origem a aprendizagens significativas, porque os alunos rapidamente compreenderam o significado das probabilidades pedidas, ainda que tivesse sido apenas uma abordagem à noção intuitiva de Probabilidade Condicionada com a tarefa.

Na minha opinião, a aula correu satisfatoriamente, tendo atingido o objetivo proposto. Porém, tenciono melhorar o ritmo da aula, que, neste caso, foi bastante rápido. Ainda assim, um aluno referiu "Isto foi bom, nunca tinha aprendido probabilidade assim!", o que demonstra o impacto que a tarefa teve nos alunos.

2ª Aula (20 de fevereiro de 2017)

Esta aula teve início com uma breve revisão dos conceitos lecionados na aula anterior, que foi acompanhada de um breve questionário aos alunos, de forma a fazer com que se relembrassem desses conceitos.

De seguida, passámos rapidamente aos três grandes momentos da aula: introdução da tarefa, trabalho autónomo por parte dos alunos e, por último, discussão e sistematização dos resultados obtidos.

A primeira alínea da tarefa, referente à recolha de dados sobre os alunos da turma, foi realizada em grupo turma. O facto de eu ter questionado os alunos sobre quantos alunos chegavam atrasados às aulas sem virem de autocarro gerou alguma animação e inquietação por parte dos alunos. Ainda assim, a turma após demonstrar esse entusiasmo, rapidamente retomou o trabalho, pelo que considero que foi um momento vantajoso dada a motivação que proporcionou aos alunos.

Após a recolha de dados, na introdução da tarefa, dei alguns minutos aos alunos para analisarem a tarefa. Como não surgiram questões, passei para o momento seguinte, pois considerei que a tarefa não necessitava de qualquer esclarecimento.

No decorrer do trabalho autónomo, como habitualmente, circulei pela sala e fui acompanhando de perto o trabalho dos alunos e a sua progressão na tarefa. Relativamente à segunda alínea, na organização dos dados numa tabela, não detetei dificuldades significativas. O mesmo não se constatou no cálculo da probabilidade pedida, na qual demonstraram dificuldades na notação e que apenas foram debatidas no último momento da aula. Passados os dez minutos previstos para este momento, ainda nenhum grupo tinha começado a resolver a última alínea. Assim, decidi prolongar esse tempo para dar oportunidade aos alunos para terminarem a tarefa. Concluo, assim, que o tempo que previ para a resolução da tarefa não era suficiente, sendo este um aspeto que tenciono melhorar.

De seguida, escolhi um aluno para ir ao quadro apresentar a sua resolução da tarefa, dada a forma como tinha organizado a sua resolução. Uma vez que os alunos não levantaram grandes dúvidas na resolução da tarefa, nem se verificou uma grande discussão acerca da mesma, questionei alguns alunos, escolhidos por mim, acerca de probabilidades com os dados que tínhamos obtido. No entanto, dada a falta de questões para debate, este momento durou menos do que aquilo que eu tinha previsto. De forma a enriquecer esse momento, poderia ter pedido aos alunos exemplos e contraexemplos sobre Probabilidade Condicionada.

Finalizado o último momento da aula, como ainda tinha tempo, comecei a tarefa da aula seguinte e distribui um pequeno papel por cada aluno, onde questionava sobre o seu sabor preferido de gelado, tendo cada um deles escolhido uma das quatro opções e, posteriormente, dobrado o papel.

Relativamente à tarefa, esta pareceu-me adequada, porém, eu ia ajustá-la-ia, adicionando novas alíneas que gerassem algum debate no último momento da aula, enriquecendo-o.

Refletindo acerca da aula, considero que o facto de os alunos participarem na tarefa e tendo em conta que a mesma se referia a dados reais, isso fez com que lhes despertasse muito interesse, empenho e motivação. Além disso, mostrou-lhes a aplicabilidade da Probabilidade Condicionada ao mundo real, pelo que considero que o balanço da aula foi positivo, baseado na informação supramencionada.

3ª Aula (20 de fevereiro de 2017)

A terceira aula da minha intervenção letiva intercalou-se da aula anterior com um intervalo de dez minutos. Com o fato dos inquéritos terem sido realizados na aula anterior, ao contrário do que constatava no plano de aula, os alunos entraram na sala com alguma curiosidade sobre a tarefa que iriam ter com base nos resultados dos inquéritos. Dada a motivação geral, pedi a dois voluntários que organizassem, no quadro, o resultado das respostas aos inquéritos, de forma a garantir-lhes a veracidade dos mesmos.

No momento de trabalho autónomo enquanto circulava pela sala, apercebi-me da falta de tempo para a resolução da totalidade da tarefa. Assim, para além de ir questionando os alunos de forma a ajudá-los a ultrapassar as suas dificuldades, fui estando atenta à progressão de todos os grupos na realização da mesma. Tal momento prolongou-se mais do que o previsto, pois as duas últimas alíneas da primeira questão suscitaram mais dúvidas do que o esperado. Dessa forma, quando a maioria dos grupos terminou a primeira questão, dei como finalizado o momento de trabalho autónomo.

Concluo que deveria ter planeado mais tempo, aquando a preparação da aula, sobretudo, porque essa gestão durante a aula tornou-se mais complicada uma vez que os grupos não têm todos o mesmo ritmo.

No momento de discussão de resultados, informei os alunos que o exercício dois da tarefa ficaria para ser feito em casa e que, caso existissem dúvidas, poderíamos corrigi-lo noutra aula. Tendo em conta a extensão do momento anterior, este, que deveria ser o maior momento da aula, em termos de tempo, foi o mais curto. Dessa forma, apenas houve tempo para que um aluno fosse ao quadro corrigir e explicar os valores obtidos, sem discutir esses resultados. No entanto, a última alínea foi corrigida por mim, pois praticamente nenhum grupo tinha chegado ao resultado ou a algo que tivesse interesse em apresentar e debater. Ao longo desta correção, fui questionando os alunos, sendo que eles iam respondendo acertadamente indicando que estavam a acompanhar as ideias abordadas. Ainda assim, isso não me garantiu que os alunos tivessem realizado aprendizagens significativas, pois não realizaram a questão autonomamente.

Relativamente à tarefa, apesar de a considerar adequada, pois integrava exercícios que requerem uma resolução analítica e outros que recorrem à interpretação, cobrindo uma maior diversidade de questões e enriquecendo o conhecimento dos alunos, alterava a linguagem das questões 1.3. e 1.4. de forma a ficarem mais percetíveis para os alunos. Na planificação, ajustava os tempos e considerava apenas a primeira questão para ser realizada durante o trabalho autónomo, de modo a ficar uma planificação mais concretizável.

Tanto os aspetos da planificação como da gestão dos tempos em sala de aula são aspetos que tenciono melhorar, de forma a enriquecer as minhas aulas. Ainda assim, considero que os objetivos da aula foram cumpridos e que esta correu satisfatoriamente.

4ª Aula (3 de março de 2017)

Como esta aula decorreu após a interrupção letiva do carnaval, comecei por fazer uma breve revisão através de um *PowerPoint* que continha um exercício para fazer em grupo turma. Para além disso, expliquei a construção de um Diagrama de Árvore e a interseção de dois acontecimentos através da fórmula da Probabilidade Condicionada. Ao longo deste momento, detetei dificuldades na turma em responder a uma questão sobre Probabilidade Condicionada e apercebi-me que muitos alunos confundiam a Probabilidade Condicionada com a Probabilidade Conjunta, uma vez que uma aluna colocou uma questão sobre Probabilidade Conjunta quando eu tinha pedido uma Probabilidade Condicionada e nenhum dos restantes alunos da turma contestou. Apesar do conceito de Probabilidade Condicionada não ter sido muito abordado, os alunos já deveriam conseguir identificar uma Probabilidade Condicionada. Deste modo, como não tinha previsto que os alunos tivessem este conceito tão esquecido, demorei mais tempo do que o que tinha previsto para a revisão. Esta alteração ao plano foi necessária, pois não seria produtivo lecionar os novos conceitos, sem antes reforçar os conhecimentos anteriores, para que os alunos conseguissem fazer a ponte de ligação entre os conteúdos.

No momento de trabalho autónomo, circulei pelos grupos de forma a apoiar e a auxiliar os alunos a progredir na tarefa, ajudando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Eles foram solicitando a minha ajuda, mostrando o seu interesse e empenho, e eu tentei aceder a todos esses pedidos. Este momento também se prolongou para além do tempo previsto, mas senti necessidade de fornecer esse tempo extra aos alunos, porque, quando circulei, reparei que os alunos apresentaram algumas dificuldades na progressão da tarefa, mas estavam empenhados em ultrapassá-las. Para além disso, achei mais vantajoso dar oportunidade aos alunos de tentarem resolver a tarefa, neste caso a primeira questão da tarefa, do que ser eu a explicar a sua resolução no quadro, visto que, praticamente nenhum grupo tinha concluído a sua resolução.

Tendo em conta o trabalho que os alunos desenvolveram e a duração do mesmo, como apenas me restavam cerca de cinco minutos para terminar a aula, optei por deixar a correção da primeira questão para a aula seguinte, visto que essa questão exigia alguma discussão e alguns esclarecimentos, o que faz com que necessitassem de mais tempo, contrariamente aquilo que era desejável no plano de aula. Desta forma, para finalizar a aula, informei os alunos que a discussão dos resultados da tarefa iria ser realizada na aula seguinte.

Em termos de concretização dos objetivos para esta aula, penso que os alunos ficaram a compreender o Diagrama de Árvore e a forma como ele nos poderá ser útil no cálculo de probabilidades de interseção. No entanto, a compreensão da noção de Probabilidade Condicionada e da sua fórmula continuou a ser uma dificuldade presente em alguns alunos, dada a sua complexidade.

Relativamente à tarefa, considero que é adequada e, com base na observação das respostas dos alunos, concluo que os ajudou a ultrapassar algumas das suas dificuldades, proporcionando-lhes essa oportunidade.

O *PowerPoint* pareceu-me bastante adequado, porque os alunos evidenciaram recordar os conceitos abordados, dado que iam respondendo acertadamente às minhas questões e que conseguiram realizar o exercício sem dificuldade. Ainda assim, uma possível alteração que faria, seria apresentar os slides das revisões no início da aula e os slides a explicar a construção do Diagrama de Árvore e o conceito de probabilidade de intersecção de dois acontecimentos no final da aula, como forma de sistematização das aprendizagens.

Apesar de ainda ter de melhorar a gestão dos tempos, considero que houve uma progressão positiva relativamente ao balanço da aula quando comparado com as aulas anteriores, de acordo com informação supramencionada.

5ª Aula (6 de março de 2017)

Esta aula teve início com um momento de discussão coletiva do trabalho realizado na aula anterior, para o qual nomeei um aluno da turma para ir ao quadro expor a sua resolução e explicar os seus raciocínios. O facto de ter sido retomada a aula anterior foi uma dificuldade para os alunos, pois perdera-se grande parte da informação que teve de ser retomada, relembrando os dados da tarefa. Ao longo da correção apresentada pelo aluno, questionei-o de forma a levá-lo a explicar a sua resolução. Também questionei outros alunos da turma de modo a verificar se tinham compreendido os conceitos envolvidos na resolução. Ainda neste momento, aproveitei para esclarecer e clarificar algumas dúvidas e confusões acerca da notação. Esta fase inicial da aula prolongou-se cerca de cinco minutos a mais do que o planeado, que suponho que tenha sido o tempo que demorámos a relembrar a tarefa.

Como houve grupos que, na aula anterior, iniciaram a resolução da questão dois da tarefa e demonstraram muitas dificuldades na sua interpretação, decidi levar para a aula os materiais necessários para os alunos realizarem a experiência descrita. Apenas como forma de facilitar a interpretação da pergunta e não para calcular as probabilidades pedidas.

Durante a apresentação da questão 2 da tarefa, exemplifiquei a experiência e questionei os alunos acerca do valor do produto dos números contidos nos cartões extraídos. Deste modo, houve um breve momento onde revi algumas regras da multiplicação de números racionais, que não tinha previsto. No entanto, considero que foi um momento enriquecedor para a turma.

Ao longo do trabalho autónomo, fui auxiliando os grupos com maiores dificuldades na experiência e aproveitei para questioná-los sobre o número de casos favoráveis e possíveis, levando-os a chegar ao valor da probabilidade pretendida. No decorrer desta exploração, os alunos foram respondendo acertadamente, indicando que estavam a acompanhar as ideias abordadas e, no final, conseguiram calcular as probabilidades autonomamente. Como grande parte dos grupos ainda não tinha concluído a tarefa, e como já não haveria tempo para iniciar o próximo momento, discussão dos resultados obtidos, optei por prolongar este momento até ao término da aula.

Em suma, considero que a discussão e sistematização de resultados deve ser feita, sempre que possível, na aula em que se resolve a tarefa, de forma a otimizar o tempo e a não haver perdas de informação. Para além disso, os alunos ficam mais interessados e atentos quando essa discussão se procede logo após a resolução da tarefa. Ainda assim, com a resolução da segunda questão da tarefa não houve prejuízo, porque a aula seguinte foi nesse mesmo dia, apenas com um intervalo de dez minutos relativamente a esta aula.

No que diz respeito à tarefa, considero que o facto de ter utilizado os materiais manipuláveis forneceu elementos aos alunos para conseguirem resolver a tarefa mais rapidamente. Considero, igualmente, que o balanço da aula foi positivo.

6ª Aula (6 de março de 2017)

No seguimento da aula anterior, esta aula iniciou-se com a discussão e sistematização dos resultados da questão 2 da tarefa. Durante este momento, uma aluna foi ao quadro fazer a sua resolução e explicar os seus raciocínios. A aluna explicou aos colegas, erradamente, que o produto entre um número negativo e dois números positivos originava um valor positivo. Desta forma, aproveitei a dúvida da aluna e discutimos, em grupo turma, a veracidade de tal afirmação e esclareci os alunos sobre o produto de números e o respetivo sinal do resultado obtido. Para tal, utilizei exemplos e contraexemplos, que era uma estratégia que pretendia adotar para as minhas aulas. Esta discussão gerou questões e conclusões interessantes sobre o produto dos números e as probabilidades obtidas. Como a última alínea não fora resolvida por nenhum dos pares de alunos, e dado o seu grau de dificuldade, para não criar dúvidas desnecessárias nos alunos, decidi ser eu a resolver esta alínea no quadro, em grupo turma.

De seguida, prossegui com a aula para o momento de introdução da tarefa. Para iniciar este momento, comecei por questionar a turma de forma a gerar algum debate introdutório sobre o tema da aula. Seguidamente, pedi a cada par de alunos que tirasse uma moeda de 1 € e distribuí um dado cúbico por cada grupo. Nesta fase, notou-se o entusiasmo e a excitação da turma, pelo facto de que não compreendia a utilidade da moeda e do dado no estudo das Probabilidades.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, certifiquei-me que os grupos estavam a realizar a experiência corretamente. Ainda assim, houve grupos que viram a independência entre o lançamento da moeda e do dado e, dessa forma, lançaram consecutivamente a moeda e, só depois, o dado, o que lhes originou uma dificuldade que eu não tinha previsto.

Na última fase da aula, aquando a discussão e sistematização dos resultados, auxiliei-me de um Excel, previamente preparado. No decorrer desta exploração, os alunos conseguiram concluir que: "Quando os acontecimentos são independentes a probabilidade da intersecção de dois acontecimentos é igual ao produto das probabilidades de cada um dos acontecimentos", bem como a definição de Probabilidade Condicionada, quando os acontecimentos são independentes. Nesta parte final da aula, houve debate entre os alunos, onde alguns tentaram explicar aos outros o significado de acontecimentos independentes. Este tornou-se um momento muito importante para toda a turma, pois proporcionou um ambiente muito propício à aprendizagem com significado.

Nesta altura da aula, um dos alunos levantou uma questão pertinente, pois não compreendia a diferença entre a probabilidade de intersecção de acontecimentos e a Probabilidade Condicionada. Assim, tentei clarificar os alunos sobre algumas das diferenças existentes na transcrição do enunciado para a probabilidade pedida e voltei a reforçar que, quando se pede para calcular o valor de uma Probabilidade Condicionada, existe sempre uma condição já previamente conhecida. Este momento desenrolou-se no tempo previsto, tendo eu antecipado algumas das dúvidas que evidenciaram sobre os dados obtidos.

A tarefa verificou-se adequada, pois os alunos conseguiram compreender os conceitos de forma clara e gerando aprendizagens significativas. Considero que foram cumpridos os objetivos que defini para esta aula, baseado na informação supramencionada. Pelo que concluo que a aula correu satisfatoriamente.

7ª Aula (10 de março de 2017)

Esta aula, à semelhança das restantes, desenrolou-se em torno de três grandes momentos: introdução da tarefa, resolução da tarefa e discussão e sistematização dos resultados obtidos.

No momento de introdução da tarefa não surgiram dúvidas por parte dos alunos e, dado que não senti necessidade de qualquer esclarecimento adicional à tarefa, optei por passar, rapidamente, ao momento seguinte.

Durante o momento de resolução da tarefa, enquanto circulava pela sala, pude aperceber-me que existia alguma confusão em termos de notação, pois os alunos estavam a utilizar a mesma letra para definir dois acontecimentos distintos. Assim, senti necessidade de interromper a aula, por breves instantes, para clarificar, em grupo turma, que acontecimentos distintos não podem ser representados pela mesma letra e para alertar os grupos que tivessem algum cuidado quando definem um acontecimento, originando uma breve revisão do capítulo 1 do módulo.

Dado que os grupos estavam todos ligeiramente atrasados na conclusão da resolução da tarefa, decidi prolongar um pouco mais a duração desse momento para esse efeito. Terminado esse tempo, apesar de nem todos os grupos terem concluído a tarefa, interrompi o trabalho dos alunos para prosseguirmos para o último grande momento da aula, de forma a tentar garantir que todos participavam e estavam atentos.

Quando os alunos se dirigiram ao quadro para explicar as suas resoluções foi notório o silêncio que se fez sentir, mostrando que os alunos, no geral, estavam a acompanhar a aula.

Quer no segmento de aula referente ao trabalho autónomo, quer no segmento dedicado à discussão coletiva, pude constatar, pelas produções dos alunos e pelas suas intervenções, que ainda existiam dificuldades na Probabilidade Condicionada, tanto na distinção com uma probabilidade de interseção de acontecimentos como também na compreensão da fórmula. Essas dificuldades mostraram estar relacionadas com as dificuldades de interpretação dos enunciados que a maioria dos alunos sente. No entanto, foi notório que muitos dos alunos já sabiam interpretar a probabilidade pedida transcrevendo-a em linguagem Matemática.

Como identifiquei as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução da tarefa, aproveitei o momento de discussão para clarificar e referir as diferenças entre uma Probabilidade Condicionada e uma Probabilidade de Intersecção de acontecimentos. Para além disso, surgiu a oportunidade de rever conceitos lecionados em aulas anteriores, tal como a definição de acontecimentos independentes. Além de responderem acertadamente às questões que fui fazendo durante este momento, os registos das suas respostas a estas questões estão maioritariamente corretos, o que me leva a concluir que os alunos não terão ficado com muitas dúvidas em relação a este tema.

Como não tínhamos tempo de resolver todas as alíneas da segunda questão, optei por não resolver a ultima alínea, preferindo dar mais ênfase à interpretação do Diagrama de Árvore representado e ao cálculo das probabilidades envolvidas na alínea anterior.

Nesta aula, notei melhorias em relação à gestão dos tempos e, dessa forma, senti que os seus grandes momentos foram mais marcados. Para além disso, consegui controlar o ritmo da mesma, dando tempo para os alunos pensarem quando eu colocava uma questão, e consegui conduzir melhor o último momento da aula, originando discussões interessantes e valiosas para as aprendizagens dos alunos.

Assim, considero que os objetivos para esta aula foram satisfatoriamente conseguidos e que o balanço da aula foi positivo, de acordo com informação supramencionada.

8ª Aula (13 de março de 2017)

Esta aula, bem como a nona aula desta unidade de ensino, foram lecionadas no mesmo dia, pelo que ambas se desenrolaram em torno da mesma tarefa, tendo esta sido resolvida fracionadamente nas duas aulas.

No momento de introdução da tarefa, os alunos analisaram apenas os primeiros dois exercícios, que eram os que iriam ser resolvidos nesta aula.

Ao longo do momento de trabalho autónomo dos alunos, fui circulando pela sala e pude observar que nenhum dos grupos estava a conseguir avançar na resolução da primeira questão. A soma das percentagens dadas no enunciado dava um valor superior a 100%, pelo que os alunos estavam a interrogar, inclusive, se estaria algum valor errado. Assim, senti necessidade de interromper o momento para explicar o sucedido no quadro, através do questionamento. Dessa forma, um aluno chegou logo ao valor da probabilidade que precisavam para resolver o exercício e, sem validar a resposta, fomos em grupo turma calcular esse valor. Durante esse momento, geraram-se discussões interessantes, nas quais os alunos participaram ativamente. Foi notório o desenvolvimento de capacidades transversais, tais como o sentido crítico, a capacidade de argumentação, a comunicação e o raciocínio matemático. Este momento prolongou-se mais do que o que era desejável, pois aproveitei para relembrar a fórmula da probabilidade de união de acontecimentos utilizando um Diagrama de Venn.

Como os alunos ainda não tinham terminado a resolução das duas questões da tarefa, e já tínhamos discutido parte da primeira questão, decidi prolongar o momento de trabalho autónomo.

No momento de discussão dos resultados, a primeira questão não gerou muita discussão, sendo que apenas se sentiram dificuldades na construção do Diagrama de Venn e na notação utilizada, que rapidamente ficaram esclarecidas. Na correção da segunda questão, aproveitei para esclarecer as dúvidas que me apercebi no momento de trabalho autónomo dos alunos.

Em síntese, penso que os objetivos desta aula foram atingidos e que as dúvidas que foram surgindo deram para esclarecer questões importantes no cálculo das Probabilidades.

Esta aula, à semelhança da aula anterior, foi, por mim, melhor gerida, tanto a nível das minhas intervenções, como a nível da gestão dos tempos, proporcionando um melhor ambiente para as aprendizagens dos alunos. Assim, considero que o balanço da aula foi positivo, de acordo com informação supramencionada.

9ª Aula (13 de março de 2017)

Esta última aula desenrolou-se em torno das questões 3 e 4 da última tarefa, de forma a concluí-la.

Passado o momento de introdução da tarefa, demos início ao trabalho autónomo dos alunos. Ao longo desse momento, fui circulando pela sala de forma a apoiar e a orientar o trabalho dos alunos. Esta fase da aula, desenrolou-se no tempo previsto, tendo eu antecipado algumas dúvidas que os alunos evidenciaram, bem como o meu papel perante elas.

No momento de discussão dos resultados, dois alunos foram ao quadro, resolver e explicar as suas resoluções. Na terceira questão não surgiram dúvidas significativas, exceto numa alínea que o aluno resolveu de forma errada. No entanto, foi logo confrontado por outro aluno da turma. Esse erro, bastante frequente, consistiu na confusão entre uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta. Deste modo, aproveitei o momento para esclarecer que estas duas probabilidades são diferentes e fizemos uma breve revisão sobre Probabilidade Condicionada, voltando a esclarecer como é que se calculava, relembrando a importância do fator condicionante. Para além disso, enquanto circulava pela sala no momento anterior, deparei-me com alguns alunos da turma a confundirem uma Probabilidade Condicionada com uma probabilidade de intersecção de dois acontecimentos. Assim, aproveitei também este momento para esclarecer e clarificar essa confusão. Durante a correção da última questão, não surgiram grandes dificuldades, nem questões que permitissem explorar outros conceitos que ainda não tinham sido explorados anteriormente, pelo que se terminou rapidamente a sua discussão. Aproveitei a oportunidade para relembrar a noção de acontecimentos independentes e para tirar dúvidas sobre conceitos anteriormente lecionados que surgiram com a resolução desta tarefa e ao longo desta unidade de ensino.

A tarefa verificou-se adequada, integrando exercícios que requerem resolução analítica acompanhada com a interpretação e o raciocínio probabilístico, cobrindo uma maior diversidade de questões relacionadas com o tema que lecionei e enriquecendo o conhecimento dos alunos. Assim, considero que foram cumpridos os objetivos definidos para esta aula.

Capítulo 4

Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados

Com o objetivo de analisar as aprendizagens e as dificuldades dos alunos do do 2.º ano do ensino profissional 2.º ano do ensino profissional no tema da Probabilidade Condicionada e na tentativa de dar resposta às questões do estudo, recolhi dados de forma a conjeturar sobre eles. Assim, neste capítulo vou apresentar os métodos de recolha de dados que utilizei durante a lecionação da subunidade didática, que lecionei na minha prática de ensino supervisionada.

Tendo em conta o objetivo e as questões do estudo, a recolha de dados baseou-se essencialmente em quatro métodos: a observação das aulas com notas de campo, a recolha documental das produções escritas dos alunos na realização de tarefas e, por último, as entrevistas a alguns alunos.

De forma a possibilitar uma maior confiança dos dados obtidos a partir de diversas fontes, o que origina uma maior fiabilidade no estudo, é essencial utilizar vários métodos de recolha de dados (Cohen, Monion & Morrison, 2000).

4.1. Observação

A observação foi um método utilizado por mim ao longo de todas as aulas da minha intervenção letiva. Este é um método importante de recolha de dados, uma vez que permite recolher informação que é difícil obter de outra forma, como por exemplo, as intervenções espontâneas dos alunos, que nos permitem conjeturar sobre as suas dúvidas e, até mesmo, sobre as aprendizagens conseguidas ao longo das aulas.

De acordo com o nível de participação do investigador, a observação pode ser considerada como participante ou não participante. Segundo Becker e Geer (1969), uma observação participante é quando o observador participa na ação, ouvindo o que é dito, observando o que acontece ou até mesmo questionando, neste caso, os alunos. Deste modo, pode considerar-se que o tipo de observação que realizei foi participante dado que estava inserida no ambiente em estudo, a sala de aula, e interagi com a turma, envolvendo-me nas atividades que estavam a decorrer na aula.

Durante a intervenção letiva, desempenhei o papel de investigadora e de professora em simultâneo, prevalecendo sempre este último em sala de aula. Neste sentido, os vários métodos de recolha de dados tornaram-se muito importantes, sendo elementos complementares da observação, de forma a não perder informação relevante sobre as aprendizagens dos alunos. No entanto, uma vez que a minha presença como professora não perturbou o normal decurso da aula e das interações entre os alunos, isso permitiu-me, enquanto investigadora, ter mais facilmente acesso ao raciocínio dos alunos, facilitando a construção de hipóteses acerca deles. Para além disso, são os raciocínios e intervenções mais genuínas que me facilitam a investigação sobre elas, sendo muitas das vezes solicitadas por mim com esse intuito. Por último, o facto de ter o duplo papel de investigadora e professora permitiu-me conhecer melhor os alunos, dada a ligação professor-aluno. Desta forma, consegui detetar mais facilmente as suas dificuldades, bem como as suas origens, e, para além disso, aproximar-me das suas perspetivas acerca de um dado conceito de forma mais eficaz. No entanto, o facto de ser professora da turma e participar nas atividades das aulas, dando-lhe especial atenção, é muitas vezes um fator de distração no que diz respeito aos objetivos da investigação. Isso requer de mim um desafio elevado enquanto professora/investigadora para manter salientes ambos os focos desses papéis.

Segundo Cohen, Manion e Morrison (2000), as notas de campo devem ser descritivas e reflexivas, detalhadas e concretas e devem permitir uma descrição cronológica dos acontecimentos. As notas de campo devem descrever os acontecimentos, recolher as dificuldades dos alunos e ainda descrever as suas reações às tarefas propostas, sendo que dessa forma dizem-se descritivas. Para além disso, devem conter pequenas reflexões acerca daquilo que observo, permitindo a sua análise, como por exemplo, a origem das dificuldades sentidas pelos alunos, ou seja, devem ser reflexivas. Assim, tendo em conta a natureza deste estudo, os seus objetivos, as questões de investigação e a sua ligação com a prática de ensino supervisionada, considerei essencial elaborar estas notas de campo que incluíram informação de diversa natureza, tanto de natureza reflexiva como descritiva das aulas, com o intuito de maximizar as informações disponíveis. Para isso, através da minha observação, durante as aulas consegui retirar algumas notas de campo e, após as aulas, consegui retirar notas provenientes da minha reflexão sobre a aula, sendo estas o mais completas possíveis. Além disso, com o auxílio da observação dos professores orientadores, da professora cooperante e do meu colega, no final de cada aula, foi feita uma reflexão sobre a mesma onde se confrontavam as observações de cada um. Dessa forma, consegui conjeturar sobre as dificuldades sentidas pelos alunos e as aprendizagens realizadas por eles. Assim, esse método permitiu-me refletir e adaptar as aulas seguintes às necessidades que se fizeram sentir na tentativa de tornar a minha intervenção mais eficaz na aprendizagem dos alunos.

De forma a complementar as notas de campo, a recolha áudio e vídeo das aulas que lecionei permitiu analisar não só as aprendizagens e dificuldades dos alunos, mas também as minhas intervenções, refletindo sobre possíveis adaptações que terei de realizar para aperfeiçoar a minha lecionação. Com esse intuito, este método de recolha de dados permitiu-me reconstituir diálogos entre alunos e entre mim e eles, durante as discussões em grupo turma, permitindo-me registar acontecimentos que ocorreram em simultâneo, como por exemplo, interações na aula, linguagem dos alunos, diálogo entre eles, e, por último, permitiu-me rever, sem restrições, os acontecimentos para interpretar e analisar os dados (Cohen et al., 2000).

Ao longo das nove aulas da minha intervenção letiva, os três pares de alunos, por mim escolhidos, foram acompanhados por gravadores de áudio. Dada a impossibilidade de estudar individualmente cada aluno da turma, selecionei três pares de alunos representativos da turma. Assim, selecionei seis alunos, cinco rapazes e uma rapariga, que escolhi de acordo com alguns parâmetros: a heterogeneidade dos alunos; a facilidade de comunicação, tanto oral como escrita; a facilidade de trabalho autónomo e cooperativo e a sua disponibilidade em participar no estudo. Relativamente aos alunos escolhidos, nas classificações da disciplina de Matemática do módulo A7, estes mostram níveis de desempenho distintos, um deles com um desempenho bom, outros três com desempenho médio e dois deles com um desempenho inferior. Estes alunos refletem a heterogeneidade dos alunos da turma em relação à capacidade de comunicação e ao desempenho que apresentam permitindo-me ter acesso aos seus raciocínios e à compreensão da noção de Probabilidade Condicionada que os alunos adquiriram. A facilidade de trabalho autónomo e cooperativo foi um aspeto igualmente fundamental, pois permitiu-me fazer uma análise das discussões destes grupos de alunos, ao longo das resoluções das tarefas, através das gravações áudio. Para além disso, estes alunos mostraram-se interessados em participar no meu estudo, não mostrando qualquer resistência em dispensar o seu tempo para a realização das entrevistas e pelo facto de terem de ficar com um gravador na sua mesa durante essas aulas. Assim, a análise dos raciocínios, das dificuldades e da noção de Probabilidade Condicionada destes alunos complementa a análise de dados dos restantes alunos da turma.

As gravações áudias realizadas durante as aulas lecionadas permitiram-me ficar com o registo das discussões dos pares durante a resolução da tarefa, o que, consequentemente permitiu a exploração e análise dos seus raciocínios.

A observação é um dos métodos que atravessa os vários momentos da aula. Na fase de trabalho autónomo, ao circular pelos pares de alunos, consegui ter acesso às aprendizagens dos alunos, às suas dificuldades e aos seus raciocínios, tendo utilizado, para isso, o método de questionamento. Além disto, esta observação permitiu-me fazer uma avaliação sobre o interesse e a participação dos alunos, dado o seu envolvimento da tarefa. De seguida, no último momento da aula, na discussão e sistematização dos resultados, voltei a ter oportunidade de compreender as aprendizagens, as dificuldades e sobretudo aos raciocínios dos alunos. O confronto entre as resoluções dos alunos permitiu uma discussão sobre as mesmas, dando acesso ao confronto entre os seus raciocínios. Com esse intuito, planifiquei sempre algumas questões de prolongamento da tarefa de forma a observar as intervenções dos alunos em questão. Ao longo das aulas consegui avaliar, no sentido qualitativo da palavra, o progresso nas aprendizagens dos alunos, sendo este um método de recolha de dados predominante para a minha prática reflexiva sobre as aprendizagens dos alunos.

No entanto, é necessário salientar que a minha presença poderia modificar o comportamento dos alunos influenciando as suas atitudes, dado que introduzir uma alteração na sala de aula poderia condicionar as suas reações. Ainda assim, como acompanhei a turma desde o primeiro dia de aulas do ano letivo no qual ocorreu a minha intervenção, a turma já estava familiarizada comigo enquanto professora, logo não considero que se tenham sentido alterações nas suas atitudes.

4.2. Recolha Documental

Dado o meu interesse nas estratégias de resolução dos alunos e nos seus raciocínios, a recolha documental das produções dos alunos foi um método central para o estudo que realizei, uma vez que as questões do estudo podem ser respondidas, em grande parte, a partir das informações encontradas nas produções escritas que recolhi. Em todas as aulas da minha intervenção letiva, recolhi todas as resoluções associadas às tarefas realizadas pelos alunos, de forma a posteriormente analisar as estratégias de resolução, bem como a conjeturar sobre possíveis dificuldades. Para além das tarefas realizadas em aula, também recolhi a minificha de avaliação "Probabilidade Condicionada" (anexo 21) que os alunos realizaram no fim da minha intervenção, a ficha de avaliação.

A recolha documental permitiu-me a análise detalhada das estratégias de resolução dos alunos, dos processos de raciocínio e, por fim, perceber a evolução ocorrida nos alunos no que diz respeito à compreensão da noção de Probabilidade Condicionada, à sua aplicação na resolução de problemas e às dificuldades que manifestaram e, nomeadamente, às que foram superadas e às que se mantiveram após a lecionação.

Contudo, um dos constrangimentos do uso deste método de recolha de dados, é os alunos não escreverem todo o seu raciocínio e riscarem ou apagarem o que escreveram, não permitindo ao investigador perceber como é que eles estavam a pensar para resolver aquela questão. Dessa forma, para tentar solucionar esse problema, distribui uma tarefa por cada par de alunos que incluía espaço para as suas resoluções e solicitei aos alunos que escrevessem a caneta. Informei também os alunos que posteriormente lhes devolvia a tarefa, bem como uma cópia da mesma, para que todos os alunos ficassem com um exemplar da tarefa. Além disso, pedi aos alunos que copiassem a correção com uma outra caneta de cor distinta. O mesmo aconteceu com a ficha de avaliação realizada na última aula da minha intervenção letiva.

Em suma, este método, tal como os restantes métodos de recolha de dados, permitiram-me refletir sobre possíveis alterações às tarefas de forma a melhorá-las para uma próxima utilização e melhorar as aulas seguintes, bem como as minhas intervenções de forma a adaptar-me às necessidades dos alunos.

4.3. Entrevistas

Após a conclusão da minha intervenção letiva, realizei entrevistas individuais aos mesmos três pares de alunos que constituíam os pares em estudo e que dispensaram tempo fora do horário da aula de Matemática. Para essas entrevistas, realizei uma pequena tarefa (anexo 22) para ser resolvida, ao longo desse momento, de forma a auxiliar-me no meu estudo e tomando em consideração as questões orientadoras da minha investigação. A tarefa foi elaborada tendo em conta a compreensão que os alunos revelaram sobre a noção de Probabilidade Condicionada. Para além disso, tive em consideração as dificuldades que os alunos foram revelando, de forma mais generalizada. Esta tarefa recuperou também questões trabalhadas em aula, no entanto, trabalhou probabilidades em forma de percentagem o que não era habitual.

Em várias aulas, relembrei que as probabilidades poderiam ser representadas em três formas diferentes: dízimas, frações ou percentagens. Deste modo, o meu objetivo passou por analisar a compreensão que os alunos revelaram da Probabilidade Condicionada e se conseguiriam adaptar essa aprendizagem numa tarefa onde os valores eram apresentados de forma distinta da habitual. Assim, tal como defendido pelo NCTM (2008), os alunos, no ensino secundário, deverão ser capazes de decidir qual a estratégia que deverão utilizar, bem como possuir a capacidade de ajustar e imaginar estratégias de forma a adaptarem as suas aprendizagens a diversas situações. Além disso, quis explorar e analisar os raciocínios apresentados, bem como as diferentes estratégias de resolução.

Deste modo, foi importante esclarecer os alunos que as suas respostas não serviriam para a sua avaliação, deixando-os à vontade para responderem de forma aberta. De forma a conduzir a entrevista, indo de encontro aos objetivos do meu estudo, preparei um guião (anexo 23) para conseguir recolher toda a informação que considerei necessária. Assim, à medida que os alunos iam resolvendo a tarefa e colocando as suas dúvidas, explicavam os seus raciocínios. Para isso, fui-lhes colocando questões, previamente pensadas por mim, tais como: “Como é que pensaste?”, “Como é que chegaste a esse valor?”, “O que é para ti uma Probabilidade Condicionada?”, “Neste caso, quais são os casos favoráveis? E os casos possíveis?”, “Explica a operação que fizeste.” e “Quais foram as dificuldades que tiveste ao resolver esta tarefa?”. As entrevistas tiveram a duração de cerca de 20 minutos cada e foram gravadas em registo áudio.

O meu papel, enquanto entrevistadora, foi apenas elaborar as questões previamente pensadas e algumas que surgiram no seguimento desta entrevista. Para além disso, tentei levar o aluno a ocupar o lugar central, sendo que não me substituí ao entrevistado nem entrevi de modo que influenciasse as suas respostas.

Desta forma, procurei recolher informações, através da recolha da produção escrita e do registo áudio, sobre as aprendizagens realizadas pelos alunos, os seus raciocínios, as suas estratégias de resolução, as dificuldades que foram ultrapassadas e aquelas que resistiram após a lecionação, bem como as suas evoluções.

Tarefa “Entrevista”

A Tarefa “Entrevista” tinha como objetivo apenas recolher dados para minha investigação. Deste modo, adaptei a tarefa de acordo com o objetivo e as questões orientadoras do meu estudo.

Dado que as entrevistas tiveram uma duração de cerca de 20 minutos, elaborei a tarefa com uma só questão com duas alíneas. Na primeira alínea, pretendia que os alunos calculassem a probabilidade do que aconteceu antes sabendo o que aconteceu depois, isto é, o acontecimento condicionante foi algo que ocorreu depois. Neste caso, a tarefa referia-se a uma análise das capacidades dos funcionários numa empresa. Desta forma, a empresa concluiu que tinha funcionários competentes e não competentes. Assim, a administração da empresa decidiu realizar um teste de forma a comprovar a competência dos seus funcionários. Na primeira questão, os alunos deveriam avaliar a probabilidade de um candidato a funcionário ser competente, sabendo que passou no teste. Na segunda alínea, pretendia que os alunos calculassem uma probabilidade semelhante, isto é, disse aos alunos o que ocorreu depois e pedi a probabilidade de algo que ocorreu antes. No entanto, as questões diferiram na formulação da questão, de modo a tentar concluir em que sentido é que a sua interpretação e a forma como elas estão escritas podiam influenciar nas dificuldades e no raciocínio dos alunos. Além disso, com estas duas alíneas, quis compreender a destreza dos alunos para manipularem algebricamente a expressão da Probabilidade

Condicionada, bem como perceber os erros e as dificuldades associadas. Em suma, com esta tarefa tentei também perceber em que medida as dificuldades persistam ou não após a lecionação desta temática.

Capítulo 5

Análise de Dados

Neste capítulo, apresento a análise dos dados recolhidos ao longo da subunidade que lecionei, tendo por objetivo poder dar resposta às questões do meu estudo. Assim, considerando o objetivo deste estudo e as questões formuladas, o capítulo estrutura-se numa análise por tarefa. Para cada uma delas, a análise será realizada tendo em conta os seguintes aspetos: a conceção que os alunos apresentam sobre a noção de Probabilidade Condicionada, os níveis do pensamento dos alunos em Probabilidade Condicionada, segundo Tarr e Lannin (2005) e a forma como utilizam esse conceito para resolver problemas, incluindo os erros e as dificuldades que manifestam no cálculo de Probabilidades Condicionadas.

A análise será realizada e evidenciada tendo como base as resoluções dos alunos nas várias tarefas realizadas em aula, na minificha, realizada no fim da minha intervenção letiva, nas gravações áudio e vídeo das aulas lecionadas e nas notas de campo elaboradas por mim ao longo da intervenção letiva. Embora faça uma análise de dados referentes a todos os alunos da turma, irei incluir também as gravações áudio do trabalho autónomo dos três pares de alunos (Francisca e Vasco, César e Mário, Cristiano e Filipe) escolhidos para registos mais individualizados, sempre que isso me permita obter evidências e uma perceção mais aprofundada no que diz respeito a alguns aspetos da aprendizagem e compreensões dos conceitos envolvidos.

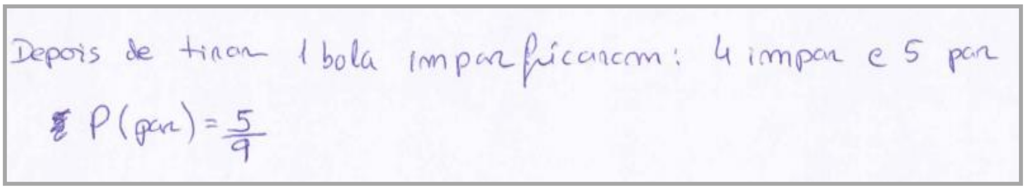
De forma a manter o anonimato dos participantes, ao longo deste capítulo os alunos serão designados por nomes fictícios.

5.1. Tarefa 1: "Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas"

A Tarefa 1, "Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas", pretendia introduzir o tema da Probabilidade Condicionada, de uma forma intuitiva, utilizando materiais manipuláveis, através de uma experiência sobre extração de bolas.

Na primeira questão da tarefa, solicitava-se o cálculo de uma Probabilidade Condicionada, assumindo que os alunos ainda não tinham contacto formal com esta noção, requerendo que aplicassem os seus conhecimentos prévios acerca de Probabilidades e que utilizassem a sua intuição. A questão referia-se a uma experiência de extração de duas bolas numeradas sem reposição da primeira, pelo que, ao retirar a primeira bola do saco, o espaço de resultados alterava-se. Nesse sentido, a questão pretendia que os alunos explorassem a sua noção intuitiva de Probabilidade Condicionada através de uma extração sem reposição.

A este respeito, a figura seguinte apresenta a resolução de um grupo de alunos, que é representativa do que foi feito pela maioria dos restantes.


Depois de tirar 1 bola impar ficaram: 4 impar e 5 par

$P(par) = \frac{5}{9}$

Figura 3: Resolução de Cristiano, Filipe e Marco à questão a) da tarefa 1

Nesta resolução, podemos verificar que os alunos compreenderam que, ao extrair a primeira bola, o espaço de resultados alterou-se, sendo capazes de identificar o número de bolas com número ímpar e par. Após definirem o novo espaço de resultados, os alunos transformaram uma Probabilidade Condicionada numa probabilidade simples e calcularam a probabilidade pedida, usando o conceito clássico que já conheciam. Isto indica também que foram capazes de interpretar corretamente a experiência e a questão.

Um outro grupo de alunos utilizou, ainda que de forma incompleta, um Diagrama de Árvore para apoiar o cálculo da probabilidade pretendida, permitindo-lhe interpretar a experiência em causa. Tal como é possível verificar na figura 4, este par de alunos indicou em cada ramo do Diagrama de Árvore a probabilidade de cada acontecimento e, de seguida, concluiu a probabilidade pretendida.

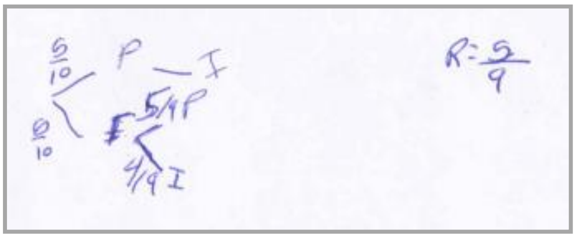


Figura 4: Resolução de Mário e César à questão a) da tarefa 1

As respostas mostram que, apesar de ainda não ter sido abordado em aula a noção de Probabilidade Condicionada, os alunos interpretaram corretamente a experiência descrita e, intuitivamente e recorrendo aos seus conhecimentos prévios de probabilidade, foram capazes de identificar que, com a extração de uma bola com um número ímpar, sem reposição, o espaço de resultados alterava-se, mas o número de bolas com número par mantinha-se. Assim, após definirem o novo espaço de resultados, alterado pelo fator condicionante, foi possível usarem o conceito de probabilidade clássica cuja definição e propriedades já conheciam.

Neste caso, os alunos mostraram reconhecer que a probabilidade dos acontecimentos se altera em situações de não reposição e conseguiram manter o controlo da composição total do espaço amostral de forma a julgar o relacionamento de dois acontecimentos nas situações sem reposição. Para além disso, todos os alunos atribuíram probabilidades numéricas em situações sem reposição, como verificamos nas figuras, o que permite concluir que usaram raciocínios numéricos para comparar a probabilidade de acontecimentos antes e depois da extração sem reposição e estabeleceram as condições necessárias ao abrigo das quais dois acontecimentos estão relacionados. Desta forma, verifica-se que a grande maioria dos alunos apresentou um nível 4 (numérico) na avaliação do seu pensamento em Probabilidade Condicionada.

Relativamente às conceções dos alunos de caráter cognitivo, estamos perante uma conceção causal da Probabilidade Condicionada. Esta conceção manifesta-se pela introdução de uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante, ou seja, tirar a primeira bola com número ímpar, e o acontecimento condicionado, a segunda bola a ser retirada ser par. A interpretação que os alunos fazem, de forma correta, é que a primeira bola extraída é uma das causas para o efeito da segunda.

No entanto, um dos grupos de alunos confundiu a Probabilidade Condicionada com a probabilidade da interseção de acontecimentos, cometendo um erro bastante comum, que consiste no cálculo de uma probabilidade conjunta quando é pedida uma Probabilidade Condicionada. Neste caso, podemos verificar que Francisca, Vasco e Bruno utilizaram o produto de duas probabilidades que significa, tal como referem na sua resposta da figura 5, "a probabilidade (…) de a segunda bola ser par e a primeira ser ímpar". Isto mostra que interpretaram incorretamente 'sabendo que' como sendo 'e', pelo que não identificaram o acontecimento condicionado e o acontecimento condicionante na experiência, como se observa na sua resolução na figura 5. Ainda assim, este grupo de alunos evidenciou compreender a experiência, pois calcularam as probabilidades de ocorrência de cada acontecimento e relacionaram-nas com os respetivos ramos do Diagrama de Árvore de forma correta. Porém, não conseguiram interpretar a probabilidade pedida e não identificaram os valores que apresentaram nesse Diagrama como sendo uma Probabilidade Condicionada e, consequentemente, não conseguiram obter uma resposta correta. Assim, ao conjugar duas das probabilidades dos ramos, obtiveram uma probabilidade conjunta e, na resposta, fizeram uma correta interpretação do valor que calcularam.

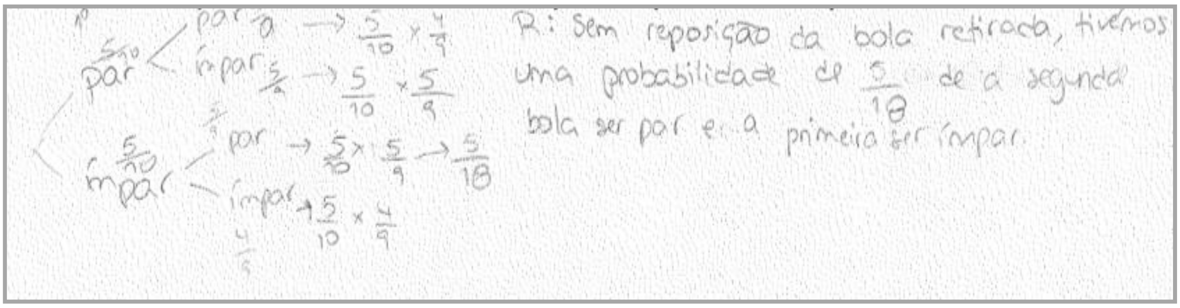


Figura 5: Resolução de Francisca, Vasco e Bruno à questão a) da tarefa 1

A questão b) da tarefa foi pensada de forma a levar os alunos a confirmarem os resultados obtidos na questão anterior. Neste sentido, cada grupo de alunos extraiu uma bola do saco com número ímpar e, de seguida, retirou aleatoriamente uma bola e registou o seu número, até repetir a experiência 20 vezes. Apesar de as 20 repetições serem insuficientes para se poder concluir sobre a probabilidade de a segunda bola extraída ter número par - sendo que a primeira bola extraída tinha número ímpar - o trabalho conjunto com as 20 repetições dos 5 grupos permitiu ter 100 repetições da experiência, pelo que já foi possível verificar se o valor da probabilidade obtida, empiricamente, estava próximo do seu valor esperado, pela definição frequencista de Probabilidade.

No entanto, ao realizarem apenas 20 repetições da experiência, 2 grupos concluíram que a probabilidade de sair bola com número par era superior à probabilidade de sair bola com número ímpar, tal como haviam esperado e como o César tinha referido, no momento de discussão dos resultados, com o seu colega Mário: "é mais provável sair bola com número par, porque já se tirou uma com número ímpar". Como podemos constatar na figura 6, este grupo de alunos apresentou as probabilidades calculadas em fração simplificada e fez uma leitura da mesma: "Há probabilidade de 7 em 10 tiragens de sair par". No entanto, os alunos apresentaram algumas dificuldades de notação, pois escreveram a fração sem identificar que se referia a uma probabilidade e a um dado acontecimento.

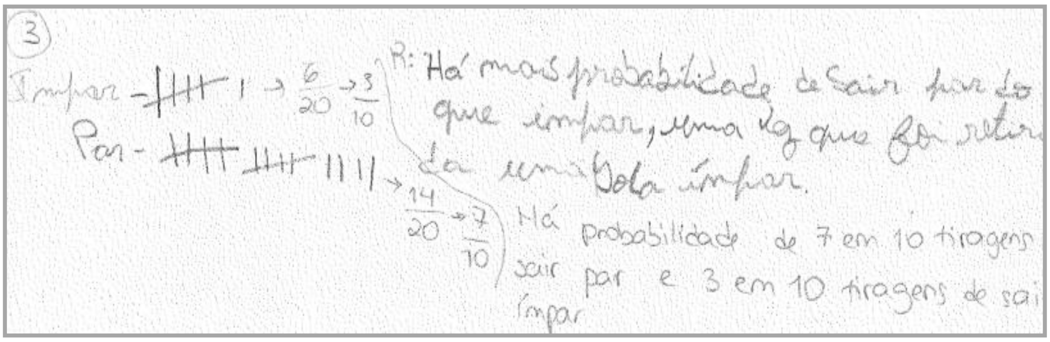


Figura 6: Resolução de Francisca, Vasco e Bruno à questão b) da tarefa 1

Apenas um grupo de alunos obteve a probabilidade de sair bola com número ímpar superior à probabilidade de sair bola com número par, no conjunto das 20 repetições da experiência. No entanto, não tiraram conclusões sobre os resultados obtidos e apenas calcularam corretamente a probabilidade de obter uma bola com número par, como mostra a figura 7.

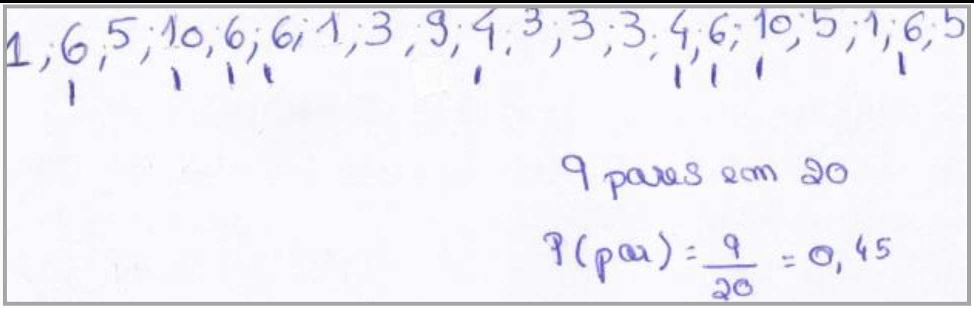


Figura 7: Resolução de Francisco, Frederico e Rita à questão b) da tarefa 1

Pretendia-se que os alunos concluíssem que os valores estavam bastante próximos e que, através da definição frequencista de probabilidade, caso realizassem a experiência um maior número de vezes, o valor obtido fosse tender para o valor teórico dessa probabilidade, calculado na questão anterior. No entanto, Francisco, Frederico e Rita não demonstraram espírito crítico para comentar os valores obtidos.

Os restantes dois grupos obtiveram valores iguais de probabilidade de sair bola com número par e bola com número ímpar, como podemos verificar nas figuras 8 e 9. Na resolução da figura 8, os alunos referem que "havia mais probabilidade de calhar par mas como é um jogo aleatório calhou à sorte", o que evidencia que os alunos interpretaram corretamente o significado de experiência aleatória e a noção de Probabilidade Condicionada. Deste modo, reconheceram que a probabilidade de sair bola com número par é mais elevada, pois existem mais bolas com número par do que com número ímpar no saco, e atribuíram o resultado díspar que obtiveram em relação à questão anterior ao número limitado de repetições da experiência.

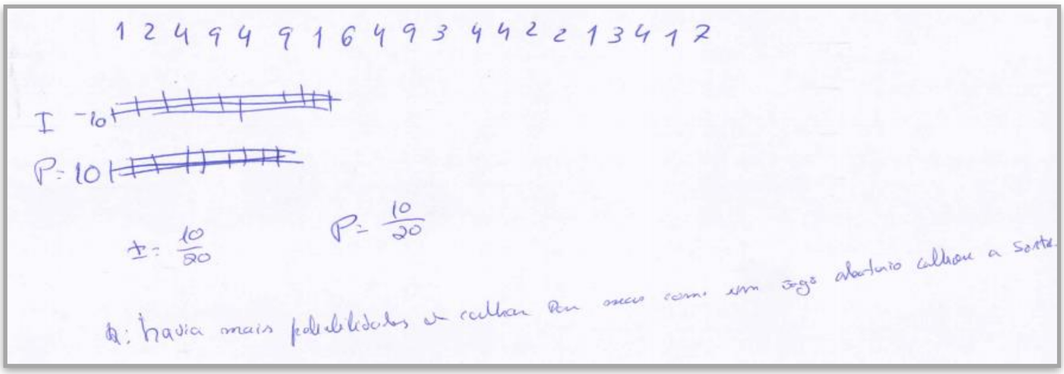
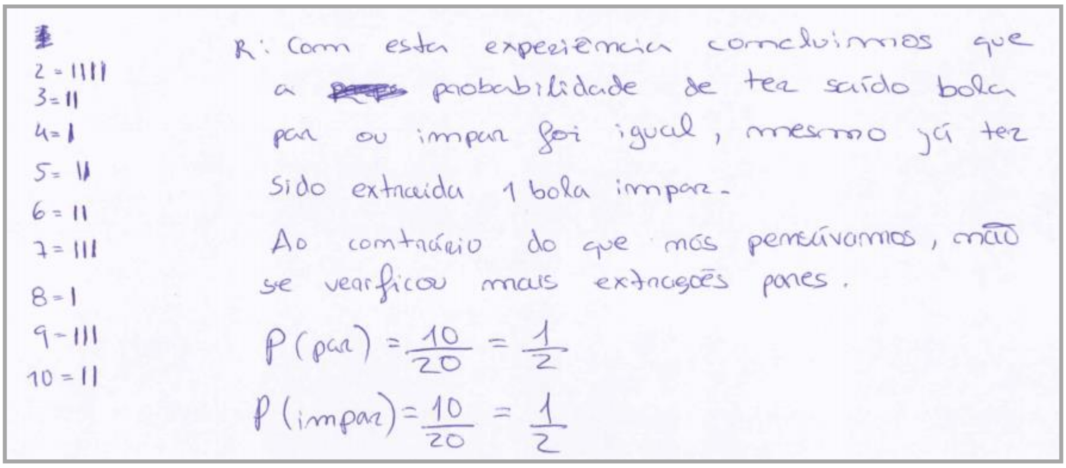


Figura 8: Resolução de César e Mário à questão b) da tarefa 1

Por sua vez, na figura 9, apesar dos alunos referirem que os resultados obtidos não estavam de acordo com os seus raciocínios na questão anterior, e contrariando as suas intuições, não foi possível verificar se estariam conscientes da razão destes resultados.


2 = IIII
3 = II
4 = I
5 = II
6 = II
7 = III
8 = I
9 - III
10 = II

R: Com esta experiência concluimos que a probabilidade de ter saído bola par ou impar foi igual, mesmo já ter sido extraida 1 bola impar.

Ao contrário do que nós pensávamos, não se verificou mais extrações pares.

$P(par) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$P(impar) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

Figura 9: Resolução de Cristiano, Filipe e Marco à questão b) da tarefa 1

Assim, a generalidade dos grupos, à exceção do da figura 8, não tem em conta a definição frequencista de Probabilidade, pois aqueles que não obtiveram uma probabilidade de sair bola com número par superior à probabilidade de sair bola com número ímpar não referiram que os resultados obtidos poderiam não ser conclusivos, atendendo ao número limitado (apenas 20) de repetições da experiência. Dessa forma, não tiraram conclusões significativas dos valores obtidos na segunda questão, relativamente ao valor calculado na primeira. No entanto, durante a discussão da tarefa, e à medida que se aumentava o número de repetições realizadas, reunindo os resultados dos 5 grupos no Excel, os alunos concluíram que, tal como Francisca explicou a Vasco, no momento de resolução da tarefa, "quanto mais extrações fizermos, mais o valor da probabilidade aumenta, para o valor suposto".

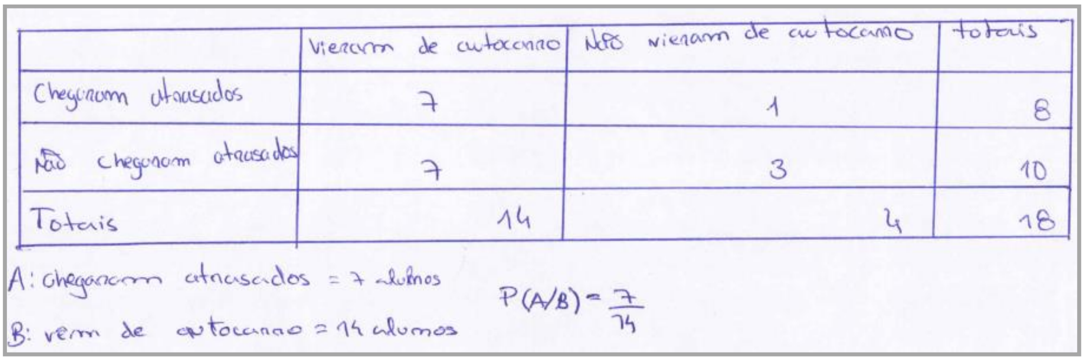
Em síntese, os alunos mostraram compreender que numa experiência de extração de bolas, sem reposição, o acontecimento condicionante (extração que ocorre antes) influencia o acontecimento condicionado e atribuíram um significado intuitivo à noção de Probabilidade Condicionada, mesmo sem ter sido abordada essa noção em aula. No que se refere à conceção sobre Probabilidade Condicionada a maioria dos alunos apresentou ter uma conceção causal, interpretando-a como uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante e o acontecimento condicionado, respetivamente. Apesar de ser uma tarefa inicial, onde os alunos ainda não tinham tido contacto com a noção formal de Probabilidade Condicionada, estes apresentaram nível 4 (numérico) na avaliação do pensamento referente a esta noção, dado que utilizaram raciocínios numéricos para resolver questões que envolviam o conceito de Probabilidade Condicionada. Ainda assim, alguns dos alunos apresentaram dificuldades na interpretação de uma Probabilidade Condicionada, pois confundiram-na com uma probabilidade conjunta. A generalidade dos alunos também apresentou dificuldades em justificar e criticar os resultados obtidos.

5.2. Tarefa 2: "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola"

A Tarefa 2, "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola", foi realizada após a lecionação da definição formal de Probabilidade Condicionada com o intuito de perceber qual a conceção apropriada pelos alunos deste novo conceito.

Após a recolha dos dados referentes ao número de alunos que chegavam frequentemente atrasados à primeira aula e que iam de autocarro para a escola, que se realizou no grupo turma, obtiveram-se os seguintes valores: 14 alunos iam para a escola de autocarro, 8 alunos chegavam à escola atrasados e, por último, 7 alunos chegavam à escola atrasados e iam para a escola de autocarro.

Na segunda questão da tarefa, alínea b), os alunos organizaram os dados recolhidos numa tabela para resolver o problema que consistia em perceber qual a probabilidade dos alunos que vêm para a escola de autocarro chegarem atrasados à primeira aula. Não se identificaram dificuldades na organização dos dados em tabela nem em calcular o valor da probabilidade dos alunos que vêm para a escola de autocarro chegarem atrasados à primeira aula, como se pode verificar na figura 10, que é representativa da maioria das respostas dos alunos.



	Vieram de autocarro	Não vieram de autocarro	totais
Chegaram atrasados	7	1	8
Não chegaram atrasados	7	3	10
Totais	14	4	18

A: chegaram atrasados = 7 alunos
B: vem de autocarro = 14 alunos

$P(A/B) = \frac{7}{14}$

Figura 10: Resolução de Cristiano e Filipe à questão b) da tarefa 2

Nesta resolução, podemos verificar que os alunos, para além de organizarem corretamente os dados numa tabela, reconheceram os acontecimentos e já utilizaram de forma correta a notação de Probabilidade Condicionada. A maioria dos alunos identificou corretamente o espaço amostral como sendo os alunos "que vêm de autocarro", os casos possíveis, e os casos favoráveis, utilizando a Lei de Laplace para calcularem a Probabilidade Condicionada pretendida, ou seja, a probabilidade dos alunos que vêm de autocarro para a escola, chegarem atrasados à primeira aula. Assim, os alunos continuaram a transformar a Probabilidade Condicionada numa probabilidade simples, como fizeram na primeira tarefa, ainda que já tivessem disponível a definição formal de Probabilidade Condicionada, demonstrando ter uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada. Através das suas resoluções, podemos verificar que os alunos estão conscientes do papel da informação quantitativa. No entanto, dado que não utilizam a noção formal de Probabilidade Condicionada e apresentam uma probabilidade simples como uma estratégia adequada para determinar a Probabilidade Condicionada, concluo que apresentam nível 3 (quantitativo informal) de pensamento sobre Probabilidade Condicionada.

Apenas um dos grupos não calculou o valor da Probabilidade Condicionada que dava resposta à questão. Para além disso, dois dos grupos não definiram os acontecimentos que utilizaram e confundiram a noção de Probabilidade Condicionada com a de probabilidade conjunta, como podemos verificar na figura 11 quando escrevem "P(vir de autocarro e chegar atrasado)", apesar de apresentarem o valor da Probabilidade Condicionada requerida. O grupo de alunos que cometeu este erro na tarefa anterior, Francisca, Vasco e Bruno, não o voltaram a cometer nesta questão. Assim, podemos constatar que, após a lecionação da definição formal de Probabilidade

Condicionada, estes alunos começaram a compreender as diferenças entre a Probabilidade Condicionada e a probabilidade conjunta.

	Vieram de autocarro	Não vieram de autocarro	Totais
Chegaram atrasados	7	1	8
Não chegaram atrasados	7	3	10
Totais	14	4	18

P(vir de autocarro e chegar atrasado) $= \frac{7}{14}$

Figura 11: Resolução do Bruno e do Francisco à questão b) da tarefa 2

Na fase de discussão da tarefa, Francisca explicou que a fração obtida como resposta provinha da seguinte interpretação: "De 14 casos possíveis, que são os alunos que vêm de autocarro, há 7 desses que chegam atrasados, logo o valor será 7 em 14". O que mostra que os alunos compreenderam a experiência bem como a definição de Probabilidade Condicionada, aqui envolvida.

Na última questão, c), estrategicamente colocada para realçar aos alunos a diferença entre a Probabilidade Condicionada e a sua transposta, os alunos revelaram maiores dificuldades, sendo que nenhum dos grupos resolveu a questão de forma autónoma e completa. Pretendia-se que os alunos calculassem a probabilidade de vir de autocarro sabendo que o aluno chegava atrasado, sem recorrer à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para perceber qual era a conceção que os alunos tinham sobre de Probabilidade Condicionada.

No entanto um dos grupos interpretou corretamente o significado de $P(A|C)$, no contexto da situação, e identificou o espaço de resultados associado a essa probabilidade. Assim, apresentaram corretamente o número de casos possíveis, o número de casos favoráveis e o valor da Probabilidade Condicionada, $P(A|C)$, como podemos verificar na figura 12.

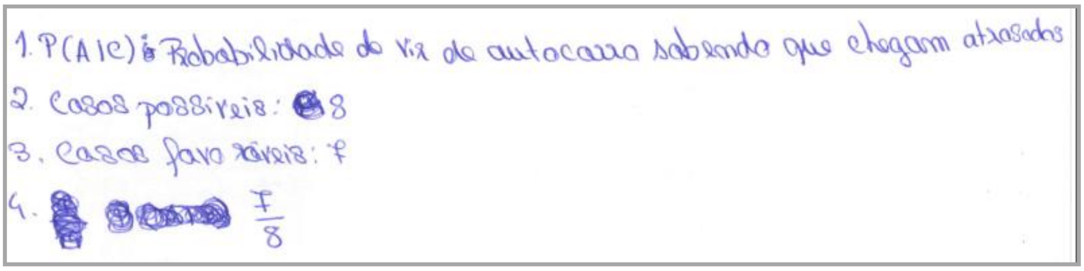

1. P(A|C) é Probabilidade de vir de autocarro sabendo que chegam atrasados
2. Casos possiveis: 8
3. Casos favoráveis: 7
4. $\frac{7}{8}$

Figura 12: Resolução de Rita e Vitor à questão c) da tarefa 2

Nesta resolução podemos verificar que os alunos, após identificarem corretamente o número de casos possíveis e favoráveis, transformaram uma Probabilidade Condicionada numa probabilidade simples e utilizaram a Lei de Laplace para obterem o valor da Probabilidade Condicionada solicitada, tal como se pretendia (que os alunos não utilizassem a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada). Esta compreensão revelada pelos alunos evidencia que apresentam um nível 4 (numérico), no que se refere ao pensamento sobre Probabilidade Condicionada e demonstraram ter uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada.

Ao longo da resolução da questão, os alunos Francisca e Vasco debateram as suas ideias sobre a noção de Probabilidade Condicionada, inserida no contexto da questão, como mostra o seguinte diálogo:

Vasco: Nesta probabilidade o que é que tens como certeza?

Francisca: O que tu sabes é que chegam atrasados! Isso é a tua certeza!

Através da análise destas intervenções, podemos verificar que estes alunos apresentam uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, pois impõem sistematicamente uma relação temporal entre o acontecimento que ocorre posteriormente, "Chegar atrasado", e o acontecimento que o antecede, "Vir de autocarro". Neste caso, os alunos definem uma Probabilidade Condicionada como sendo aquela sobre a qual se tem conhecimento prévio de um facto. Assim, através da resolução deste grupo e desta discussão evidencia-se que os alunos compreenderam corretamente o significado de Probabilidade Condicionada pois perceberam que existe um acontecimento que condiciona o outro.

Apenas um grupo de alunos, cuja resolução apresento na figura 13, não apresentou a interpretação do significado de $P(A|C)$ no contexto da situação, ou seja, não indicou que $P(A|C)$ é a probabilidade de vir de autocarro, sabendo que chega atrasado, ainda que tenham calculado corretamente o valor dessa probabilidade.

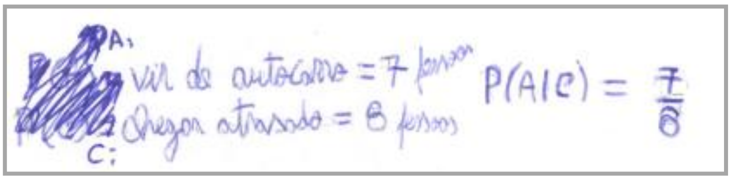
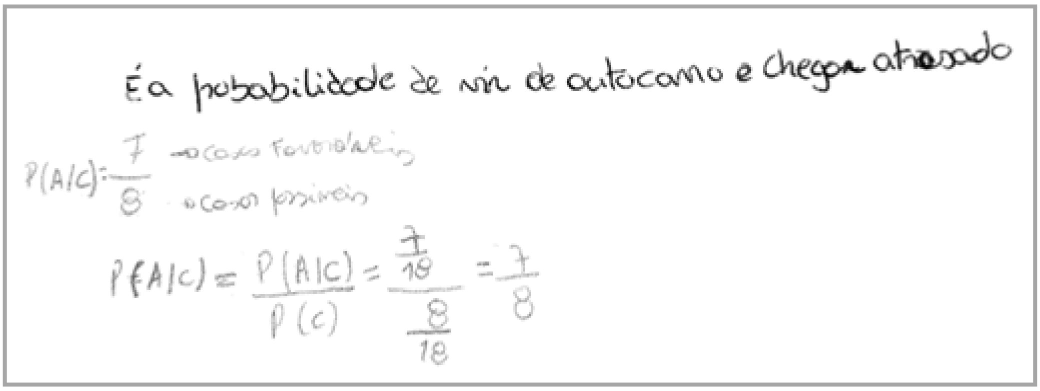


Figura 13: Resolução de Francisca e Vasco à questão c) da tarefa 2

Nas resoluções apresentadas, a maioria dos alunos evidenciou reconhecer o espaço amostral da probabilidade em questão, ou seja, 8 pessoas, que é o número de alunos que chegam atrasados e identificou corretamente o número de casos favoráveis, ou seja, desses 8 alunos, os 7 que vêm autocarro. No entanto, nesta resolução, os alunos identificam 7 como sendo o número de alunos que vêm de autocarro, o que está incorreto, pois existem 14 alunos que vêm para a escola de autocarro. Assim, os alunos mostram confundir o número de pessoas que vêm de autocarro e chegam atrasadas com o número de pessoas que vêm de autocarro, apresentando dificuldades na noção de acontecimentos conjuntos.

Como mostra a figura 14, a resolução de Frederico evidencia a dificuldade do aluno em perceber as diferenças entre uma Probabilidade Condicionada e uma probabilidade conjunta. No entanto, calculou corretamente o número de casos favoráveis e possíveis acerca da Probabilidade Condicionada. Assim o aluno demonstrou compreender o espaço de resultados da probabilidade solicitada. Para além disso, recorreu à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para confirmar o valor que obteve anteriormente, através do seu raciocínio probabilístico. O facto de utilizar a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada permite-me reforçar que o aluno associou, corretamente, a probabilidade pretendida a uma Probabilidade Condicionada, ainda que não a tenha definido corretamente em linguagem corrente.

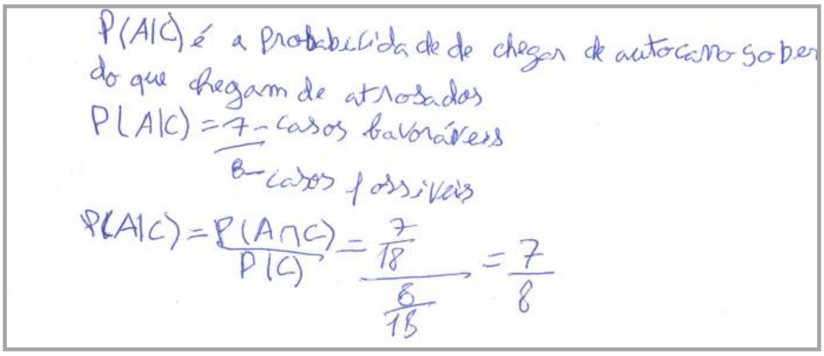

É a pobabilidade de vir de autocarro e chegar atrasado

$P(A|C) = \frac{7}{8}$ → casos favoráveis → casos possíveis

$P(A|C) = \frac{P(A|C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{8}{18}} = \frac{7}{8}$

Figura 14: Resolução de Frederico à questão c) da tarefa 2

Tal como Frederico, também Bruno e Francisco, recorreram à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para confirmar o resultado que tinham obtido através da interpretação do significado da Probabilidade Condicionada no contexto da situação descrita, como se observa na figura que se segue.


P(A|C) é a probabilidade de chegar de autocarro sabendo que chegam de atrasados

$P(A|C) = \frac{7}{8}$ 7 - casos favoráveis, 8 - casos possíveis

$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{8}{18}} = \frac{7}{8}$

Figura 15: Resolução de Bruno e Francisco à questão c) da tarefa 2

Esta resolução mostra que os alunos compreenderam o significado de $P(A|C)$, no contexto do problema, e identificaram corretamente o número de casos favoráveis e possíveis e, consequentemente, através da Lei de Laplace, calcularam a probabilidade que se pretendia. Recorreram também à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada, abordada na aula anterior, para comprovarem o seu raciocínio probabilístico. Assim, a sua resolução revela alguma destreza na manipulação da expressão algébrica associada à Probabilidade Condicionada. Deste modo, Bruno e Francisco utilizaram raciocínios numéricos para interpretarem situações de Probabilidade Condicionada, pelo que apresentaram nível 4 (numérico) no pensamento sobre Probabilidade Condicionada.

Dois grupos de alunos apresentaram um significado de $P(A|C)$ diferente dos restantes, tal como mostram as figuras 16 e 17.

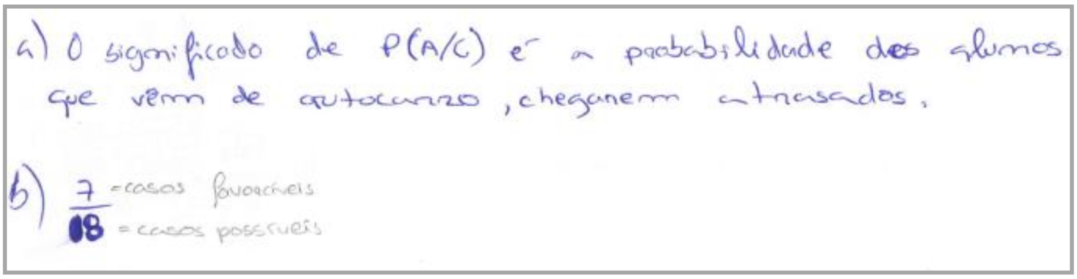


Figura 16: Resolução de Cristiano e Filipe à questão c) da tarefa 2

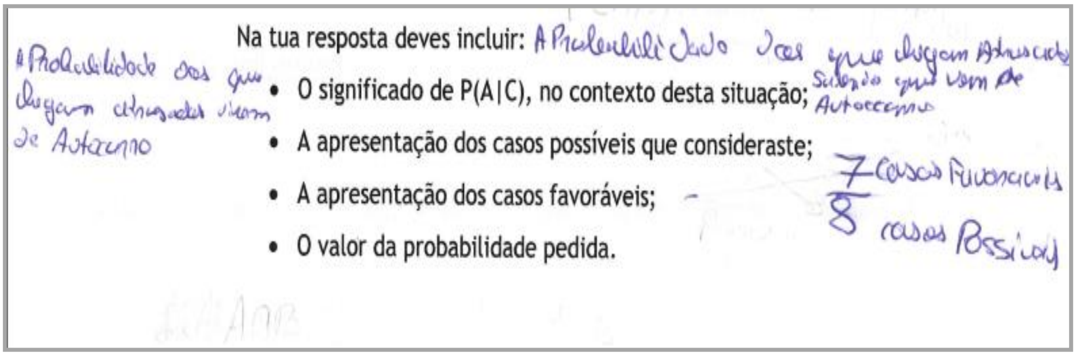


Figura 17: Resolução de César e Mário à questão c) da tarefa 2

Nas respostas anteriores, podemos verificar que os alunos interpretaram a probabilidade $P(A|C)$ como sendo a sua transposta, $P(C|A)$, ou seja, identificaram a probabilidade de vir de autocarro, sabendo que chegou atrasado, como sendo a probabilidade de chegar atrasado, sabendo que vieram de autocarro. Apesar de utilizarem linguagem diferente, “probabilidade dos alunos que vêm de autocarro, chegarem atrasados” e “probabilidade dos que chegam atrasados sabendo que vêm de autocarro”, ambos os grupos incorreram no erro da falácia condicional transposta. Deste modo, apesar de não discriminarem entre a Probabilidade Condicionada e a sua transposta, os alunos apresentaram como valor de $P(C|A)$ o valor de $P(A|C)$, que representa a resposta correta da questão.

Ao longo da resolução da tarefa, César afirmou que “8 são os que chegam atrasados, mas 7 vêm de autocarro. Então os casos possíveis são os 8. Ou seja, 7 sobre 8”. Assim, esta intervenção comprova que os alunos apenas evidenciaram ter dificuldades em apresentar a notação adequada da Probabilidade Condicionada em questão, dado que a calcularam corretamente. Esta confusão pode ter tido origem, porque os alunos consideraram desprovida de sentido a possibilidade de se saber o acontecimento futuro, "Chegar atrasado", sem saber o que aconteceu anteriormente, "Vir de autocarro". Assim, verifica-se que os alunos apresentaram ter uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, ou seja, entendem a Probabilidade Condicionada como impondo sistematicamente uma relação temporal entre os dois acontecimentos.

De forma a introduzir esta tarefa comecei por questionar os alunos acerca da sua conceção sobre Probabilidade Condicionada: "O que é para vocês uma Probabilidade Condicionada?". Dois alunos, César e Francisca responderam respetivamente: "Uma probabilidade que tem qualquer coisa atrás, que está a condicionar" e "Uma Probabilidade Condicionada é uma probabilidade que se calcula tendo a certeza de um facto". A resposta de César mostra uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada pois entende a Probabilidade Condicionada como impondo sistematicamente uma relação temporal entre dois acontecimentos, ou seja, um acontecimento que se realiza antes do outro. Já a resposta de Francisca evidencia uma conceção causal da Probabilidade Condicionada, atribuindo-lhe significado de uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante e o acontecimento condicionado. Assim, podemos constatar que, Francisca, ao contrário de César, alterou a sua conceção sobre Probabilidade Condicionada após a aula, visto que ao longo da resolução da tarefa Francisca apresentou uma conceção cronológica e César manteve uma conceção cronológica sobre Probabilidade Condicionada.

No entanto, durante as entrevistas, que foram realizadas depois de toda a lecionação sobre esta temática e após a minificha, Francisca e César responderam, respetivamente: "Uma Probabilidade Condicionada é quando já se sabe alguma coisa, (…) dos dados todos só usamos parte pois já temos uma condição" e "É uma probabilidade que já é influenciada por um fator", apresentando, ambos os alunos, uma conceção causal da Probabilidade Condicionada. Assim, quando questionei sobre a noção de Probabilidade Condicionada, César evidencia ter alterado a sua conceção da noção de Probabilidade Condicionada, ao longo da lecionação, de uma conceção cronológica para uma conceção causal da Probabilidade Condicionada, e Francisca mostra ter mantido a conceção apresentada no final da segunda tarefa. Em suma, constato que estes alunos apresentam várias conceções sobre Probabilidade Condicionada.

Em síntese, após a análise das resoluções desta tarefa, a maioria dos alunos apresentou respostas corretas no cálculo e na interpretação de Probabilidades Condicionadas. Apresentam nível 4 (numérico) no pensamento sobre Probabilidade Condicionada e refletiram um bom desempenho na compreensão da conceção de Probabilidade Condicionada, apresentando os três tipos de conceções sobre Probabilidade condicionada, causal, cronológica e cardinal. No entanto, a maioria dos alunos revelou uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada pois calcularam os valores das probabilidades condicionadas requeridas recorrendo à Lei de Laplace. Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos, aquelas que mais se manifestaram foram: a dificuldade em distinguir uma Probabilidade Condicionada de uma probabilidade conjunta e a dificuldade em compreender as diferenças entre uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta, sendo que aderiram ao erro da falácia da condicional transposta.

5.3. Tarefa 3: "Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?"

A Tarefa 3, "Probabilidade Condicionada 3: Os sacos e as bolas", pretendia reforçar a importância do uso de Diagramas de Venn para calcular as probabilidades de acontecimentos, mais especificamente Probabilidade Condicionada.

Antes de iniciarem a resolução da tarefa, os alunos recolheram dados reais da turma sobre o sabor de gelado preferido de cada um deles. Todos os alunos responderam a um questionário e, em grupo turma, obteve-se os seguintes resultados: 2 alunos preferiam morango, 3 alunos preferiam baunilha, 8 alunos preferiam ambos os sabores e, por último, 5 alunos responderam que nenhuma das opções anteriores se adequava.

A primeira alínea, da primeira questão da tarefa, solicitava que os alunos organizassem os dados obtidos num Diagrama de Venn. Nesta questão, os alunos não apresentaram dificuldades tendo todos respondido de modo uniforme. Assim, uma resposta representativa dos alunos da turma apresenta-se na figura que se segue.

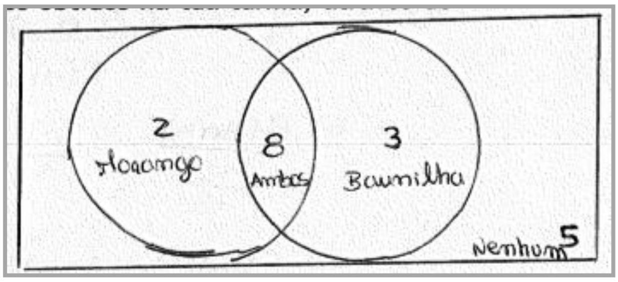


Figura 18: Resolução de Cristiano e Filipe à questão 1.1 da tarefa 3

Apenas um grupo de alunos mostrou associar o número de alunos que preferem ambos os sabores à interseção entre os acontecimentos 'Gostar de morango' e 'Gostar de baunilha', como se pode observar na figura 19.

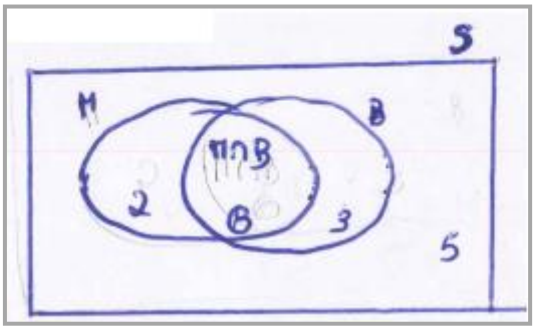


Figura 19: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.1 da tarefa 3

Assim, Francisca e Vasco evidenciaram compreender a noção de interseção de dois acontecimentos, no contexto do problema, isto é, que o acontecimento gostar de ambos os sabores é representado pela interseção $M \cap B$, ou seja.

Na segunda alínea desta questão, pretendia-se que os alunos calculassem diversas probabilidades, de acordo com os dados recolhidos. Por exemplo, esperava-se que calculassem a probabilidade simples de, escolhido um aluno ao acaso, este gostar de morango; a Probabilidade Condicionada de, escolhido um aluno ao acaso, este gostar de baunilha, sabendo que gostava de morango; e, por último, a probabilidade conjunta de, escolhido um aluno ao acaso, este gostar de morango e baunilha.

No cálculo da probabilidade simples não surgiram dúvidas significativas, pelo que todos os grupos de alunos responderam corretamente à questão. A figura que se segue mostra um dos exemplos de resposta que surgiu na turma, embora esta resolução se distinga das restantes dado que, ainda que implicitamente, os alunos apresentaram o seu raciocínio. Ou seja, tal como Bruno e Francisco, os alunos evidenciaram compreender que os que "gostam de morango" são todos aqueles que gostam apenas de morango, bem como todos aqueles que gostam de ambos os sabores.

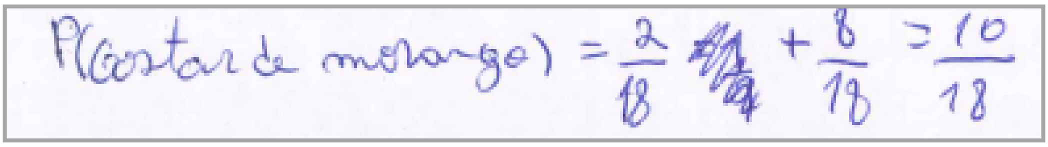


Figura 20: Resolução de Bruno e Francisco à questão 1.2.1. da tarefa 3

Na alínea seguinte, apenas um grupo de alunos não respondeu corretamente e, dos grupos que responderam corretamente, dois deles não utilizaram notação adequada para apresentar o valor da Probabilidade Condicionada pedida, apresentando apenas a fração correspondente a essa probabilidade.

Nenhum dos grupos apresentou o seu raciocínio, nem para o número de casos favoráveis, nem para o número de casos possíveis, pelo que não é possível analisar a noção cognitiva que fazem acerca de Probabilidade Condicionada. No entanto, ao longo da resolução da tarefa, Vasco, em conversa com Francisca, afirmou que "A probabilidade de gostar de baunilha, sabendo que gosta de morangos (…) Então são ambos". Ao que a Francisca respondeu: "Não, o 'sabendo que' vai condicionar os resultados!". A intervenção de Vasco evidencia que o aluno apresenta dificuldades em compreender as diferenças entre uma Probabilidade Condicionada, a probabilidade de gostar de baunilha, sabendo que gosta de morango, e uma probabilidade conjunta, a probabilidade de gostar de ambos os sabores. Por sua vez, Francisca evidencia associar uma Probabilidade Condicionada à expressão 'sabendo que', considerando que essa expressão diz respeito a um acontecimento que condiciona o outro. Ou seja, ainda que implicitamente, a aluna apresente uma conceção causal da Probabilidade Condicionada, pelo que a relaciona com uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante e o acontecimento condicionado.

O único grupo que não respondeu corretamente à questão, Américo e Martim, apesar de terem definido corretamente os acontecimentos, calcularam a probabilidade de, escolhido um aluno ao acaso, este gostar de morango sabendo que gostava de baunilha, que é a Probabilidade Condicionada transposta do que se pretendia, como podemos observar na figura 21.

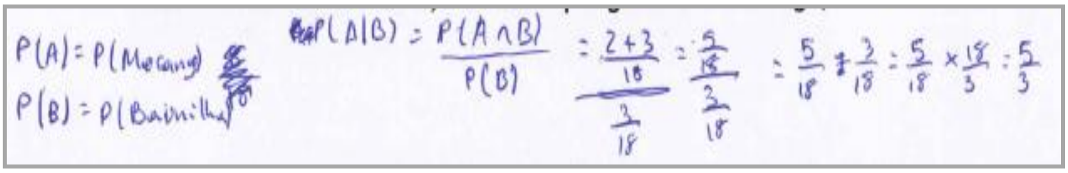


Figura 21: Resolução de Américo e Martim à questão 1.2.2. da tarefa 3

Assim, este par de alunos incorreu no erro da falácia condicional transposta, ou seja, demonstrou dificuldades em distinguir uma Probabilidade Condicionada com a sua transposta. Para além disso, os alunos apresentaram mais duas incorreções. Inicialmente calcularam a probabilidade de interseção entre os acontecimento A e B como sendo a soma da probabilidade de gostar apenas de morango com a probabilidade de gostar apenas de baunilha, calculando $\frac{2}{18} + \frac{3}{18}$, em vez de $P(A \cap B) = \frac{8}{18}$, que é o resultado da probabilidade dos alunos gostarem, simultaneamente, de ambos os sabores. Para além disso, ao calcularem a probabilidade de interseção desses acontecimentos, somaram as probabilidades individualmente, quando, ainda que os valores estivessem corretos, deveriam ter calculado o produto dos mesmos. Por fim, para calcularem a probabilidade de gostar de baunilha, $P(B)$, consideraram somente os alunos que gostavam apenas de baunilha, não considerando aqueles que gostavam de ambos os sabores.

Na última alínea desta questão, pretendia-se que os alunos calculassem a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, gostar simultaneamente de morango e baunilha. Todos os grupos responderam corretamente usando notação apropriada para a probabilidade conjunta, como $P(M \cap B)$ ou $P(gostar\ de\ morango\ e\ baunilha)$.

Na próxima questão da tarefa, pedia-se que os alunos imaginassem que, desta vez, metade das pessoas que gostavam apenas de morango preferissem apenas baunilha e questionava-se sobre a probabilidade de, escolhido um aluno ao acaso, este gostar de morango, sabendo que gostava de baunilha. Para além disso, pretendia-se que os alunos fizessem alguma analogia com a questão 1.2.2, tendo como objetivo alertar os alunos para a compreensão de que uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta diferem. Neste sentido, era importante que os alunos concluíssem que apesar dos casos favoráveis se manterem, o espaço de resultados não era o mesmo e, portanto, o número de casos possíveis alterava-se.

Ao longo da resolução desta questão, Francisca afirmou para Vasco que a probabilidade de gostar de morango, sabendo que gostava de baunilha, era "1 em 8 (…) que é gostar de morango sobre gostar de ambos". Neste caso a aluna estava a calcular a probabilidade considerando que se o aluno gostava de baunilha, e dado que se pretendia que também gostasse de morango, o número de casos possíveis limitava-se a ser os alunos que gostavam de ambos os sabores. Para o número de casos favoráveis, a aluna ignorou o fator condicionante e pensou no número de alunos que apenas gostavam de morango. Assim, a resposta da aluna evidenciou algumas lacunas na definição de Probabilidade Condicionada, pois, no seu cálculo contabilizou como casos favoráveis, casos que não pertenciam ao espaço amostral. Assim, a aluna evidencia uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada pois representa $P(M|B)$ como sendo, erradamente, a quantificação do quociente de $\frac{card\{M\}}{card\{M \cap B\}}$.

De seguida, Francisca e Vasco questionaram-me sobre o número de casos favoráveis e possíveis referentes à Probabilidade Condicionada. Pelo que, de forma a não retirar o grau de desafio da questão, questionei os alunos sobre "Quantos é que gostam de baunilha? E de morango?", levando-os a concluir, autonomamente, que os casos possíveis eram aqueles que gostavam de baunilha. Deste modo, analisando a resolução de Francisca e Vasco, figura 22, é possível verificar que, os alunos compreenderam que o número de casos possíveis são o número de pessoas que gostam apenas de baunilha e de ambos os sabores, ou seja, 4 + 8 =12. Assim, verificaram que o número de casos favoráveis, em relação à 1.2.2., não se alterou, pelo que continuava a ser o número de pessoas que gostava de ambos os sabores, ou seja, 8. Apesar de não terem justificado esses valores na resolução da tarefa, justificaram o seu raciocínio no momento de discussão da mesma, tendo Francisca afirmado que:

> 1 pessoa gosta de morango e 4 pessoas gostam de baunilha. Tínhamos de ver quantas pessoas gostam de baunilha, ou seja, 4 gostam de baunilha, mas também há quem goste de baunilha e morango, que dá os 12. O 8 é o número de casos favoráveis que são os que gostam de ambos os sabores.

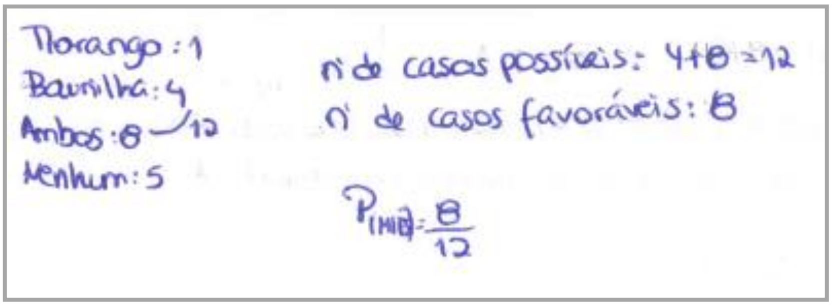


Figura 22: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.3. da tarefa 3

Apenas Marco respondeu de forma a tentar fazer alguma conexão com a questão 1.2.2., relacionando uma Probabilidade Condicionada com a sua transposta, como se verifica na figura 23. Assim, o aluno conseguiu atingir o objetivo da questão, mostrando compreender uma das diferenças entre a Probabilidade Condicionada e a sua transposta.

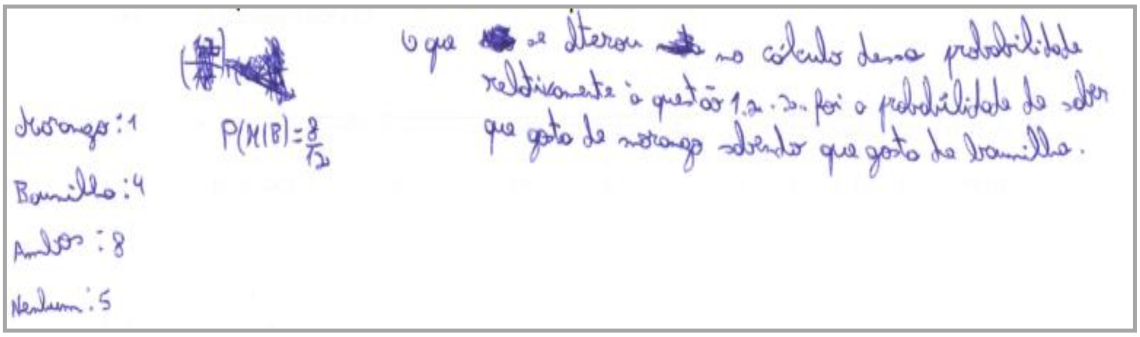


Figura 23: Resolução de Marco à questão 1.3. da tarefa 3

A resolução de Marco mostra que o aluno identificou a diferença entre uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta, através da interpretação que fez de ambas. Marco mostrou compreender que existe diferença entre calcular a probabilidade de, escolhido um aluno ao acaso, este gostar de baunilha, sabendo que gosta de morango e a probabilidade de um aluno gostar de morango, sabendo que gosta de baunilha. Através da resposta do aluno, podemos verificar que, para ele, a questão de comparar essas duas probabilidades se torna desprovida de sentido, sendo que se percebe que são duas probabilidades distintas, através da linguagem corrente que usa.

Por fim, a última questão da tarefa pretendia que os alunos não se focassem nos resultados obtidos e utilizassem dados novos. Neste caso, os alunos sabiam que existiam 12 alunos que gostavam apenas de morango e sabiam, também, que a probabilidade de gostar de morango sabendo que gostavam de baunilha, era de 1/3. Desta forma, pretendia-se que descobrissem o número de alunos que gostavam de ambos os sabores. Esta questão distinguia-se das outras, pois solicitava o cálculo de uma probabilidade conjunta a partir do valor de uma Probabilidade Condicionada, através de manipulação algébrica.

Todos os alunos da turma revelaram dificuldades na resolução desta questão, pois nenhum grupo de alunos conseguiu resolvê-la de forma autónoma. Apenas César conseguiu calcular mentalmente essa probabilidade, sem utilizar a expressão da Probabilidade Condicionada. Assim, na fase de discussão dos resultados, César calculou o número de alunos que gostam de ambos os sabores, como sendo o quociente de 12 por 3, dado que um terço dos 12 alunos que gostavam de morango, ou seja, 4, também gostava de baunilha.

Em suma, a análise desta tarefa não permite inferir sobre a conceção de Probabilidade Condicionada que os alunos vão construindo, exceto no caso de Francisca que evidencia uma conceção causal e uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada. No entanto, a análise desta tarefa deu oportunidade para confirmar que os alunos apresentam mais dificuldades no cálculo de uma Probabilidade Condicionada do que no cálculo de uma probabilidade conjunta, confundindo frequentemente estas noções. Outra dificuldade evidenciada foi a distinção entre uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta.

5.4. Tarefa 4: “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de bombons e o acaso dos cartões”

A quarta tarefa da minha intervenção letiva, “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de bombons e o acaso dos cartões”, tinha como principal objetivo a compreensão da representação em Diagrama de Árvore, num contexto de Probabilidades Condicionadas, bem como da sua importância para auxiliar a resolução de problemas que as envolvem.

A primeira questão descrevia uma experiência que consistia em lançar um dado para selecionar uma de duas caixas de bombons existentes - se saísse número par, escolhia-se a caixa vermelha e dos cinco bombons de chocolate e quatro de leite, retirava-se um aleatoriamente. Caso o número do lançamento do dado fosse ímpar, escolhia-se a caixa azul, que era constituída por três bombons de chocolate e um de leite.

A primeira alínea requeria que os alunos, de acordo com os dados do problema, construíssem um Diagrama de Árvore que representasse a situação descrita. Todos os alunos construíram o Diagrama de Árvore de forma correta, como exemplificado na figura 24.

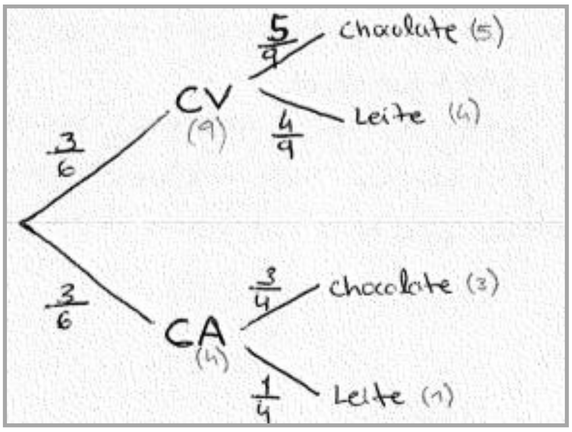


Figura 24: Resolução de Cristiano e Filipe à questão 1.1 da tarefa 4

Cristiano e Filipe colocaram, nos primeiros ramos, a probabilidade como sendo $\frac{3}{6}$ que correspondia à probabilidade de, no lançamento do dado, sair face par, que originava a escolha da caixa vermelha, e de sair face ímpar, levando à escolha da caixa azul. No entanto, numa discussão inicial entre eles, foi possível perceber que os alunos assumiam a probabilidade dos primeiros ramos como sendo $\frac{1}{2}$ que, neste caso, estaria correto pois apenas seria uma fração simplificada de $\frac{3}{6}$. Ainda assim, Cristiano e Filipe estavam a ignorar o acontecimento do lançamento do dado e assumiam, “ $\frac{1}{2}$ porque são duas caixas”. Mas, após relerem a experiência, Filipe percebeu que a probabilidade era “3 sobre 6. Porque se for número par é uma caixa e se for número ímpar é outra. Como o dado tem 3 pares e 3 ímpares, é 3 sobre 6.”.

Na segunda alínea solicitava-se o cálculo de Probabilidades Condicionadas e simples. A alínea 1.2.a. solicitou a probabilidade de o bombom extraído ser de leite, sabendo que era da caixa vermelha. Para responder a esta questão, os alunos apenas precisavam de recorrer ao Diagrama de Árvore que construíram anteriormente. Desta forma, os alunos não apresentaram dificuldades, sendo que todos os grupos responderam acertadamente.

No entanto, Filipe e Cristiano apresentaram dificuldades na interpretação da questão, numa fase inicial, visto que não conseguiram distinguir uma Probabilidade Condicionada de uma probabilidade conjunta, ou seja, a probabilidade de o bombom extraído ser de leite, sabendo que era da caixa vermelha com a probabilidade de extrair um bombom de leite e da caixa vermelha. Esta dificuldade foi expressa pelo grupo durante a discussão da questão, quando calcularam o valor da probabilidade solicitada como sendo “este vezes este”, ou seja, calcularam o produto de duas probabilidades de dois ramos, que deu origem a uma probabilidade conjunta. De seguida, após se terem apercebido que a probabilidade solicitada era uma Probabilidade Condicionada, Filipe comentou que “primeiro temos de escolher a caixa, depois o bombom.” Através da intervenção do Filipe, podemos constatar que o aluno demonstrou ter uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, dado que impôs uma relação temporal entre os dois acontecimentos, o lançamento do dado para a escolha da caixa e a extração do bombom. Tal como Filipe, também Cristiano, durante a entrevista, interpretou a Probabilidade Condicionada de acordo com uma sequência temporal entre os dois acontecimentos, apresentando uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada.

Na alínea seguinte, pretendia-se que os alunos determinassem a probabilidade de, extraindo um bombom ao acaso, este ser de chocolate. Para encontrar esta probabilidade, os alunos tinham de calcular a soma da probabilidade de o bombom ser de chocolate e da caixa azul com a probabilidade de o bombom ser de chocolate e da caixa vermelha. De forma geral, os alunos interpretaram esta probabilidade como sendo uma probabilidade simples, somando o número de bombons de chocolate de ambas as caixas, para formar os casos favoráveis, e calcularam o quociente desse valor com o número total de bombons de ambas as caixas, ou seja, o número de casos possíveis. Assim, os alunos consideraram que a escolha da caixa, bem como a sua constituição, não interessava para o cálculo desta probabilidade, como podemos verificar na resolução que se segue.

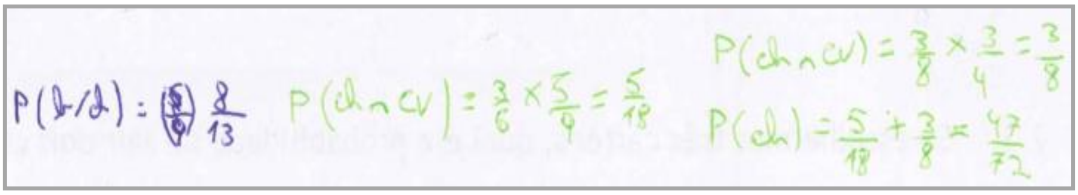


Figura 25: Resolução de Marco à questão 1.2.b. da tarefa 4

Enquanto circulei pela sala e me deparei com esta dificuldade dos alunos, questionei-os sobre a influência das caixas na extração de um bombom de chocolate, pelo que, após a compreensão da probabilidade requerida, muitos grupos de alunos conseguiram calcular o valor correto, como se verifica nas figuras 26 e 27.

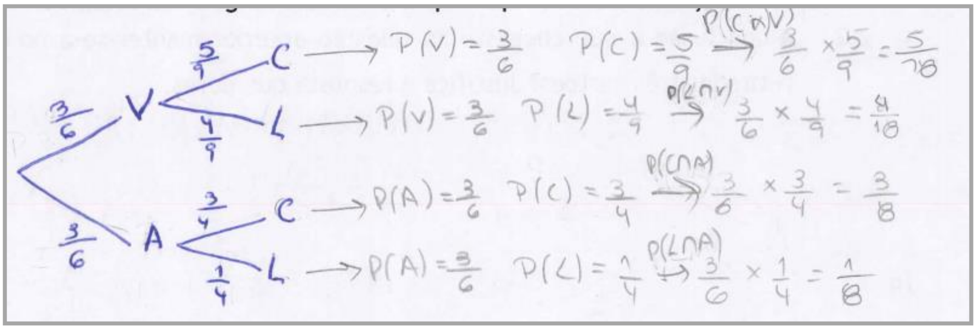


Figura 26: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.1. da tarefa 4

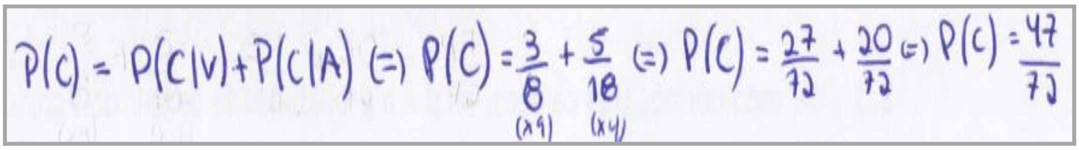


Figura 27: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.2.b. da tarefa 4

Inicialmente, na questão 1.1., Francisca e Vasco utilizaram os valores do Diagrama de Árvore e calcularam todos os valores de probabilidades conjuntas que se poderiam obter. Depois, para determinarem o valor da probabilidade de o bombom extraído ser de chocolate, apenas somaram os valores obtidos anteriormente. Ainda assim, este grupo de alunos utilizou corretamente os valores das probabilidades conjuntas, que tinham calculado em 1.1, mas, por distração, identificaram-nas como sendo Probabilidades Condicionadas quando escreveram $P(C|V)$, ou seja, a probabilidade de o bombom extraído ser de chocolate, sabendo que foi retirado da caixa vermelha, em vez de de $P(C \cap V)$,a probabilidade do bombom ser de chocolate e da caixa vermelha.

Na última alínea da questão, invertendo a sequência temporal dos acontecimentos, solicitava-se que os alunos calculassem a probabilidade de o bombom extraído ser da caixa azul sabendo que era de chocolate. Esta questão poderia acarretar algumas dificuldades adicionais aos alunos pois não poderia ser respondida apenas através da observação do Diagrama de Árvore, ou seja, era necessário que os alunos manipulassem a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para chegarem ao valor pretendido, a partir dos dados representados no Diagrama. A generalidade dos alunos calculou a probabilidade de o bombom extraído ser da caixa azul, sabendo que era um bombom de chocolate, como sendo a probabilidade de o bombom extraído ser de chocolate, sabendo que tinha sido extraído da caixa azul, como podemos observar na figura 28.

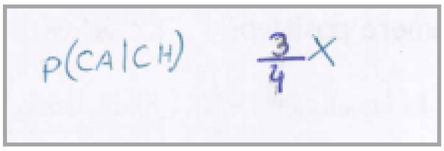


Figura 28: Resolução de Marta e José à questão 1.2.c. da tarefa 4

Nesta resolução, os alunos identificaram corretamente a probabilidade solicitada, $P(CA|CH)$, mas associam-na ao valor de $P(CH|CA) = \frac{3}{4}$. O mesmo aconteceu na fase de discussão de resultados, quando Filipe, que foi apresentar a sua resolução no quadro, justificou esse valor através do Diagrama de Árvore, pois primeiro tinha ido "à caixa azul e depois calculei a probabilidade de ser de chocolate".

Deste modo, os alunos incorreram no erro da falácia condicional transposta, associando o valor da probabilidade de $P(CH|CA)$ ao valor da sua Probabilidade Condicionada transposta, $P(CA|CH)$. Para além disso, os alunos evidenciaram apresentar uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, pois para eles a probabilidade requerida era desprovida de sentido, dado que invertia a sequência temporal, pedindo a probabilidade de um acontecimento passado.

Por sua vez, uma pequena parte dos alunos calcularam corretamente a probabilidade solicitada através da manipulação da expressão algébrica da Probabilidade Condicionada, como se verifica na figura que se segue.

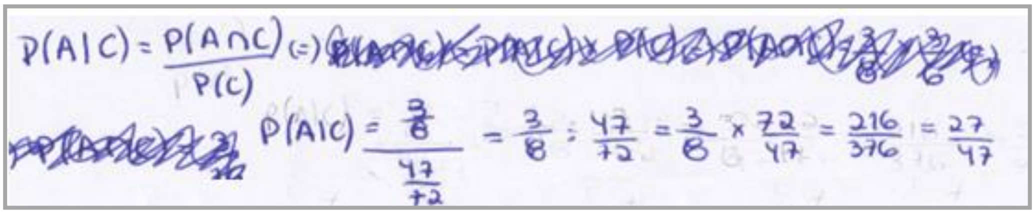


Figura 26: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.2.c. da tarefa 4

A última alínea, desta primeira questão, requeria que os alunos analisassem e comentassem a afirmação: “A probabilidade de o bombom ser da caixa azul, sabendo que é de chocolate, tem precisamente o mesmo valor da probabilidade de o bombom ser de chocolate, sabendo que é da caixa azul”. Esta questão tinha como principal objetivo focar que uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta, na maioria das vezes, tinham valores distintos. Assim, pretendia-se que os alunos calculassem ambas as probabilidades e tirassem essa conclusão, visualizando a sua distinção, no que se refere à notação, ou seja, $P(A|C) \neq P(C|A)$.

Esta questão gerou muita discussão entre os alunos, sendo que alguns diziam que se a “afirmação é verdadeira, a probabilidade é a mesma” e os outros defendiam que as probabilidades eram diferentes, apenas pela linguagem utilizada, tal como se constata através das resoluções dos alunos presentes nas figuras 29 e 30.

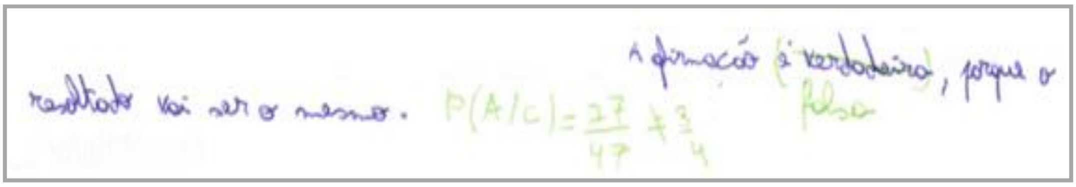


Figura 29: Resolução de Marco à questão 1.3. da tarefa 4

Nesta resolução, o aluno interpretou ambas as probabilidades como sendo a mesma probabilidade e, portanto, afirmou erradamente que ambas as probabilidades iriam ter o mesmo valor. Assim, o aluno apresentou dificuldades em diferenciar uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta, não evidenciando compreender que o espaço amostral era diferente e, portanto, os valores das probabilidades eram distintos, levando o aluno a incorrer no erro da falácia da condicional transposta.

Por sua vez, na resolução que se segue, figura 30, os alunos conseguiram verificar, recorrendo à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada, que as probabilidades requeridas eram distintas por terem denominadores diferentes.

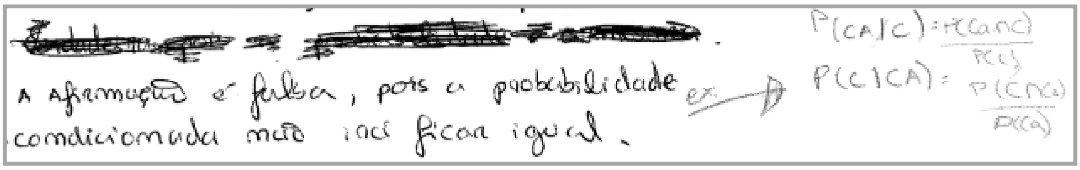


Figura 30: Resolução de Cristiano e Filipe à questão 1.3. da tarefa 4

Francisca e Vasco também recorreram à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada mas sentiram necessidade de calcular as probabilidades para mostrar que eram diferentes, como se mostra na figura 31.

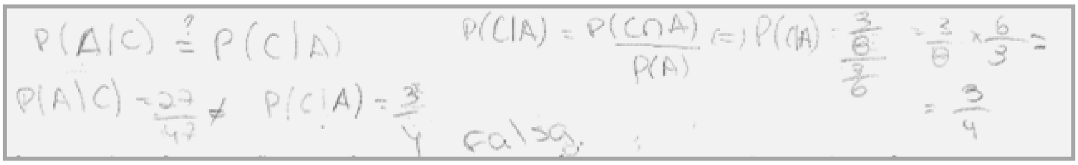
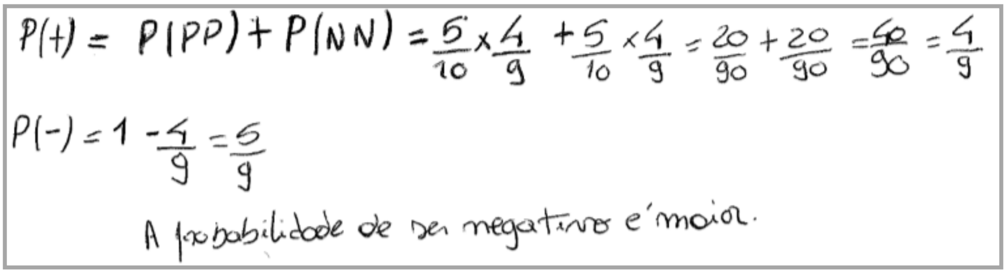


Figura 31: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.3. da tarefa 4

A segunda questão da tarefa referia-se a uma experiência com dez cartões, com um número escrito, 5 deles com números positivos e os restantes 5 com números negativos. Desta forma, a primeira alínea questionava os alunos: se se extraíssem ao acaso dois cartões, haveria maior probabilidade de o produto dos números extraídos resultar em número positivo ou negativo?

César, durante a resolução da questão, comentou com Mário que “Se tirar número negativo, há mais probabilidade de ser positivo. Se tirar número positivo, há mais probabilidade de ser negativo”. Este aluno interpretou incorretamente que a probabilidade requerida era uma Probabilidade Condicionada, ou seja, a probabilidade do segundo cartão ter número positivo, sabendo que o primeiro cartão extraído tinha número negativo, por exemplo, sendo o acontecimento condicionante o primeiro cartão extraído. Desta forma, o aluno considerou a alteração do espaço amostral e mostrou compreender que o sinal do segundo cartão extraído dependia do primeiro cartão extraído. A afirmação de César, evidencia uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, ou seja, impôs uma relação temporal entre os acontecimentos.

Frederico, por seu lado, apresentou um raciocínio muito eficaz. Inicialmente, pensou no caso de o produto originar um número positivo e, dessa forma, concluiu que ambos os números tinham de ter o mesmo sinal. De seguida, somou as probabilidades de acontecerem ambos os casos. Por último, para calcular a probabilidade de o produto originar um número negativo, calculou através da diferença entre 1 e esse valor, pois compreendeu que os acontecimentos eram contrários. Assim, concluiu que o mais provável é o produto originar um valor negativo, como podemos observar na figura 32.



$$P(+) = P(PP) + P(NN) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90} + \frac{20}{90} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

$$P(-) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

A probabilidade de ser negativo é maior.

Figura 32: Resolução de Frederico à questão 2.1. da tarefa 4

Por último, Francisca e Vasco recorreram ao Diagrama de Árvore, como estratégia para encontrar a solução do problema. Calcularam a probabilidade de interseção dos acontecimentos como sendo o produto de uma probabilidade simples e uma Probabilidade Condicionada. Dessa forma, conseguiram chegar aos valores corretos para concluírem, de forma acertada, que existe maior probabilidade de o produto originar um número negativo.

Para resolver a alínea seguinte, que questionava se o resultado se mantinha caso houvesse três extrações em vez de serem apenas duas, a generalidade dos alunos construiu um Diagrama de Árvore e conseguiu concluir que a probabilidade neste caso seria igual, ou seja, que com três extrações seria tão provável que o produto dos números originasse um valor positivo como um valor negativo. Assim, os alunos mostraram compreender a construção de um Diagrama de Árvore e utilizaram-no como estratégia para calcularem probabilidades conjuntas, através da definição de Probabilidade Condicionada, no contexto do problema. Relativamente a esta questão, uma das resoluções apresentada foi a de Frederico, na figura 33.

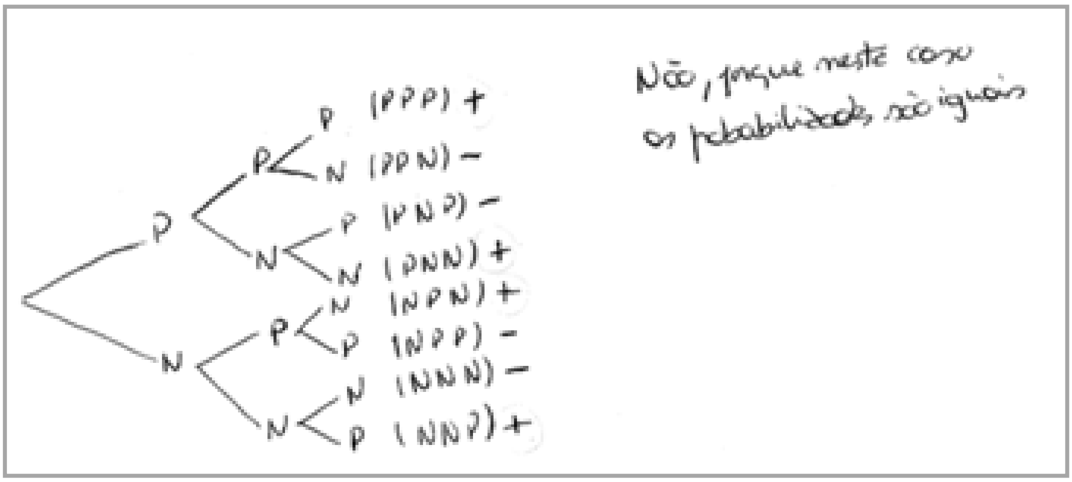


Figura 33: Resolução de Frederico à questão 2.2. da tarefa 4

Na sua resolução, o aluno mostrou perceber as hipóteses de o produto dos três números originar um valor positivo ou um valor negativo. Dessa forma, verificou que o número de hipóteses de originar um valor positivo era 4, tal como o número de hipóteses de originar um valor negativo. Assim, considerou que o valor de ambas as probabilidades era igual. No entanto, não calculou a probabilidade de cada uma das hipóteses, por exemplo, da primeira extração resultar um número par, da segunda, um número ímpar e da terceira extração originar novamente um número par, sendo que inferiu que eram acontecimentos equiprováveis. Desta forma, o aluno mostra não compreender as alterações que uma extração sem reposição acarreta no espaço de resultados e, consequentemente, no valor das probabilidades após cada uma das extrações.

Resumindo, os alunos evidenciaram ter uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, impondo sistematicamente uma relação temporal entre dois acontecimentos, pelo que a questão que inverteu essa ordem foi interpretada como sendo desprovida de sentido. Relativamente às dificuldades apresentadas pelos alunos, eles continuaram a incorrer no erro da falácia condicional transposta, apresentando dificuldades em compreender a diferença entre Probabilidade

Condicionada e a sua transposta. Para além disso, continuaram com dificuldades em distinguir uma Probabilidade Condicionada e uma probabilidade conjunta.

5.5. Tarefa 5: "Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado"

A tarefa 5 "Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado", cujo objetivo era desenvolver a noção de acontecimentos independentes através da aprendizagem da noção de Probabilidade Condicionada, consistiu numa experiência de lançamento de um dado numerado de 1 a 6 e de uma meda de 1€, registando o resultado da face que fica voltada para cima (par ou ímpar no dado e face nacional ou euro na moeda). Os grupos realizaram a experiência 20 vezes.

Na segunda questão da tarefa e de acordo com os dados obtidos, os alunos determinaram a probabilidade de sair face nacional no lançamento da moeda e de sair número par no lançamento do dado. Todos os grupos contabilizaram o número de lançamentos em que saiu face nacional na moeda, e número par no dado, respetivamente, de forma a calcularem o quociente entre esses valores e os 20 lançamentos que realizaram, utilizando a definição frequencista de probabilidade. A alínea seguinte que solicitava aos alunos determinarem a probabilidade de sair face nacional na moeda em simultâneo com número par no dado, originou algumas dúvidas na turma. Muitos dos alunos calcularam esse valor através do produto da probabilidade de sair face nacional com a probabilidade de sair número par, ou seja, através do produto das probabilidades obtidas nas duas questões anteriores. No entanto, o que se pretendia com esta questão era que os alunos verificassem em quantas experiências surgiu, no dado, um número par e, na moeda, face nacional, em simultâneo. Deste modo, os alunos calcularam a probabilidade de interseção entre dois acontecimentos através do produto das probabilidades de cada um deles, ainda que não soubessem o porquê de se poder calcular assim.

A última questão da tarefa pretendia, então, que os alunos inferissem a propriedade de acontecimentos independentes, $P(P \cap N) = P(P) \times P(N)$, através das questões orientadoras anteriores. Através dos resultados obtidos pelos alunos, surgiram duas respostas distintas a esta questão, sendo que uma delas se apresenta na figura 34.

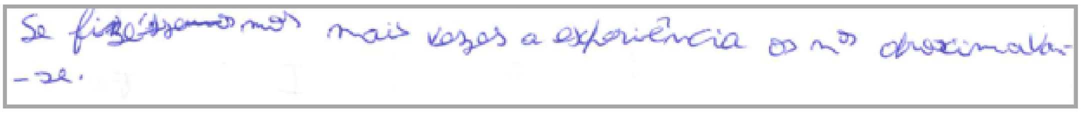


Figura 34: Resolução de Bruno e Francisco à questão 1.3. da tarefa 5

Bruno e Francisco mostram nesta resolução uma evolução na compreensão da noção frequencista de probabilidade, relativamente à primeira tarefa, quando ao verificaram que o valor obtido pelo produto das probabilidades de sair face nacional e de sair número par era próximo do valor da probabilidade da interseção desses acontecimentos, concluindo que, se fizessem mais vezes a experiência, os valores das probabilidades de $P(P \cap N) e\ P(P) \times P(N)$, tenderiam a aproximar-se.

Américo e Martim calcularam $P(P \cap N) = \frac{1}{5} = P(P) \times P(N)$ na sua experiência, pelo que concluíram que os valores eram iguais, como mostra na figura 35.

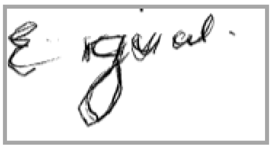


Figura 35: Resolução de Américo e Martim à questão 1.3. da tarefa 5

Apesar destes alunos concluírem que os valores são iguais, não formularam a hipótese de isso acontecer por serem acontecimentos independentes.

Durante a discussão, à medida que ia integrando os resultados das experiências dos diversos grupos, os alunos concluíram que os valores tendiam a aproximar-se consoante o aumento do número de experiências. Para além disso, verifiquei que os alunos já tinham uma noção intuitiva sobre acontecimentos independentes, quando questionei "O que são para vocês acontecimentos independentes?". César respondeu "Acontecimentos independentes são quando um não influencia o outro" e Filipe deu um exemplo de acontecimentos independentes através da extração de duas canetas do estojo, com reposição da mesma: "Tens 7 canetas no estojo. Se tirares duas, quando tiras a primeira vais afetar a segunda. Mas se voltares a por a caneta no estojo já não afeta". Nesta afirmação, Filipe evidenciou compreender as alterações do espaço amostral quando são experiências sem reposição e, para além disso, demonstrou que compreende que, em experiências sem reposição, o espaço amostral não se altera, originando acontecimentos independentes.

Na continuação da discussão, evidenciada pelo diálogo seguinte, os alunos revelam que já compreendem o significado de acontecimentos independentes:

> Profª: Então qual é a probabilidade de sair face nacional na moeda, sabendo que saiu um número inferior a 3 no lançamento do dado?
> Francisca: Se não têm nada a haver um com o outro como é que se calcula?
> Profª: Então qual é a probabilidade de sair face nacional?
> Francisca: Então é $\frac{1}{2}$.

Desta forma, os alunos concluíram que quando os acontecimentos são independentes, para calcular uma Probabilidade Condicionada basta calcular a probabilidade simples do acontecimento condicionado, uma vez que o acontecimento condicionante não influência esse valor. Concluíram, igualmente, que a probabilidade de interseção de dois acontecimentos é igual ao produto das probabilidades de cada acontecimento, através da noção de Probabilidade Condicionada, se e só, se os acontecimentos forem independentes.

Em síntese, os alunos apresentaram nível 4 (numérico) na avaliação do pensamento em Probabilidade Condicionada, pois não só utilizaram raciocínios numéricos para interpretaram situações de Probabilidade Condicionada como também reconheceram a sua importância para verificaram se dois acontecimentos são ou não independentes.

5.6. Tarefa 6: "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras."

A tarefa 6: "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras" teve como objetivo a resolução de problemas envolvendo Probabilidades Condicionadas, probabilidades conjuntas e acontecimentos independentes.

A questão 1.1.c. solicitava a probabilidade de, escolhendo um professor ao acaso, este não ser fumador e não ser do género masculino. Esta probabilidade conjunta foi facilmente calculada pelos alunos, ainda assim, houve um grupo que não respondeu corretamente, como se observa na figura 36.

$$P(\overset{\overline{N}}{\text{fumadoa}} \text{ e } \overline{m} \text{ masculino}) = \frac{50}{65}$$

Figura 36: Resolução de Cristiano e Filipe à questão 1.1.c. da tarefa 6

Nesta resolução, podemos verificar que Cristiano e Filipe identificaram corretamente o número de casos favoráveis, ou seja, o número de professores que não são fumadores e são do género feminino. No entanto, restringiram o espaço de resultados a apenas 65, em vez de utilizarem os 80 professores para o número de casos possíveis. Estes alunos utilizaram como casos possíveis os 65 professores que não são fumadores, dado que, calcularam a probabilidade de ser do género feminino, sabendo que não era fumador. Assim, esta resolução mostra que estes alunos ainda manifestaram dificuldades em compreender as diferenças entre uma Probabilidade Condicionada e uma probabilidade conjunta.

Os restantes grupos não apresentaram dificuldades em compreender a probabilidade solicitada e responderam acertadamente como se observa na figura 37.

$$P(\overline{F_u} \cap \overline{M}) = \frac{50}{80}$$

Figura 37: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.1.c. da tarefa 6

Francisca e Vasco, por observação da tabela de dados, verificaram que existiam 50 professores que eram do género feminino e não eram fumadores, em 80 professores (totalidade dos professores). Assim, recorrendo à Lei de Laplace, calcularam a probabilidade conjunta. No entanto, numa fase inicial da resolução desta questão, Francisca referiu, "$\frac{50}{65}$ porque 65 não são fumadores", ou seja, à semelhança da resposta de Cristiano e Filipe, também Francisca apresentou dificuldades em distinguir uma Probabilidade Condicionada e uma probabilidade conjunta.

Uma outra resposta correta foi a de Marta e Rita que, como mostra a figura que se segue, calcularam o valor da probabilidade conjunta através da noção de Probabilidade Condicionada.

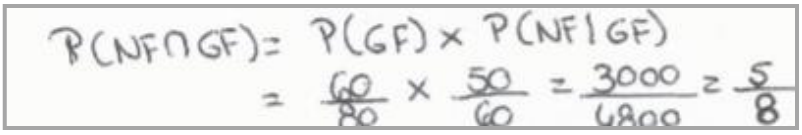


Figura 38: Resolução de Marta e Rita à questão 1.1.c. da tarefa 6

Neste caso, Francisca e Marta calcularam a probabilidade de, escolhendo um professor ao acaso, este ser do género feminino e não ser fumador, recorrendo, acertadamente, à manipulação algébrica da expressão da Probabilidade Condicionada. No cálculo da probabilidade de $P(NF|GF)$, as alunas mostraram compreender que o espaço amostral se alterou dos 80 professores em estudo para 60, que são os professores do género feminino. Para além disso, mostraram perceber a importância da Probabilidade Condicionada, utilizando-a para determinarem uma probabilidade conjunta. Assim, as alunas apresentaram nível 4, numérico, na avaliação do pensamento em Probabilidade Condicionada pois utilizaram raciocínios numéricos, sobre Probabilidade Condicionada, no cálculo de outras probabilidades e monitorizam de perto a composição do espaço amostral.

A última alínea desta questão, 1.1.d., requeria a probabilidade de o professor escolhido ao acaso ser fumador, sabendo que era do género masculino. Nesta resposta, a maioria dos alunos não teve dificuldades e, através da observação da tabela, calcularam corretamente o valor como mostra a figura 35.

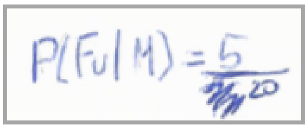


Figura 39: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.1.d. da tarefa 6

Francisca, na fase de discussão da tarefa, referiu de forma a complementar a sua resposta que “Só há 5 fumadores masculinos e os masculinos são 20”, ou seja, a aluna compreendeu que o espaço amostral era constituído apenas por professores do género masculino e, desses, existiam 5 que eram fumadores. Deste modo, Francisca e Vasco utilizaram a Lei de Laplace para calcular a probabilidade solicitada, apresentando assim uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada. Esta resolução mostra que Francisca e Vasco apresentam nível 4 (numérico) na avaliação do pensamento sobre Probabilidade Condicionada, pois utilizaram raciocínios numéricos em questões envolvendo Probabilidade Condicionada e mostram monitorizar de perto a composição do espaço amostral.

Por sua vez, Cristiano e Filipe apresentaram uma resposta distinta das restantes, figura 36.

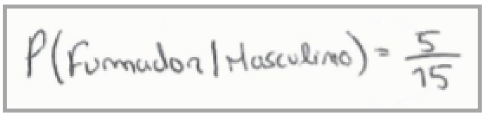


Figura 40: Resolução de Cristiano e Filipe à questão 1.1.d. da tarefa 6

Nesta resolução, apesar dos alunos identificarem corretamente a probabilidade requerida, ou seja, $P(fumador|masculino)$, calcularam essa probabilidade como sendo a probabilidade de, escolhido um professor ao acaso, este ser do género masculino sabendo que é fumador, $P(masculino|fumador)$, ou seja, a transposta da Probabilidade Condicionada solicitada. Desta forma, Cristiano e Filipe contabilizaram como casos possíveis os 15 professores que eram fumadores, em vez dos 20 professores que eram do género masculino. Assim, os alunos incorreram no erro da falácia condicional transposta, apresentando dificuldades em distingui-las. Cristiano, nas entrevistas realizadas após a lecionação desta temática, revelou manter esta dificuldade e aderiu novamente à falácia condicional transposta, pois calculou a probabilidade de ser competente, sabendo que passou no teste, como sendo a probabilidade de passar no teste, sabendo que era competente.

Na fase de discussão, como extensão da tarefa, questionei os alunos sobre "Qual é a probabilidade de ser do género feminino sabendo que não é fumador?", ao que Francisca respondeu "50 em 65. Nós sabemos que não é fumador, e se não é fumador tem de ser os 65 totais. E, nesse espaço de resultados, 50 são femininos". Esta resposta evidencia que a aluna compreende a noção de Probabilidade Condicionada e consegue identificar corretamente o espaço amostral na situação descrita, ou seja, os 65 professores. Assim, a aluna voltou a apresentar um nível 4, numérico, de avaliação do pensamento sobre Probabilidade Condicionada pois manteve o controlo da composição total do espaço amostral e utilizou um raciocínio numérico para determinar o valor da probabilidade solicitada.

A primeira alínea da segunda questão solicitava a probabilidade de sair bola verde na primeira extração feita por cada uma das equipas. Os alunos rapidamente compreenderam que, apesar de serem experiências diferentes, uma com reposição e outra sem reposição, ambas as equipas tinham o mesmo espaço de resultados e, portanto, originava o mesmo valor para a probabilidade de sair bola de cor verde, na primeira extração. Assim, todos os alunos responderam corretamente ao valor dessa probabilidade.

A segunda alínea da segunda questão questionava os alunos sobre a probabilidade de sair bola verde na segunda extração, em cada uma das equipas. Para a resolução desta questão a maioria dos alunos utilizou o Diagrama de Árvore como estratégia para resolver o problema, como se mostra na figura seguinte.

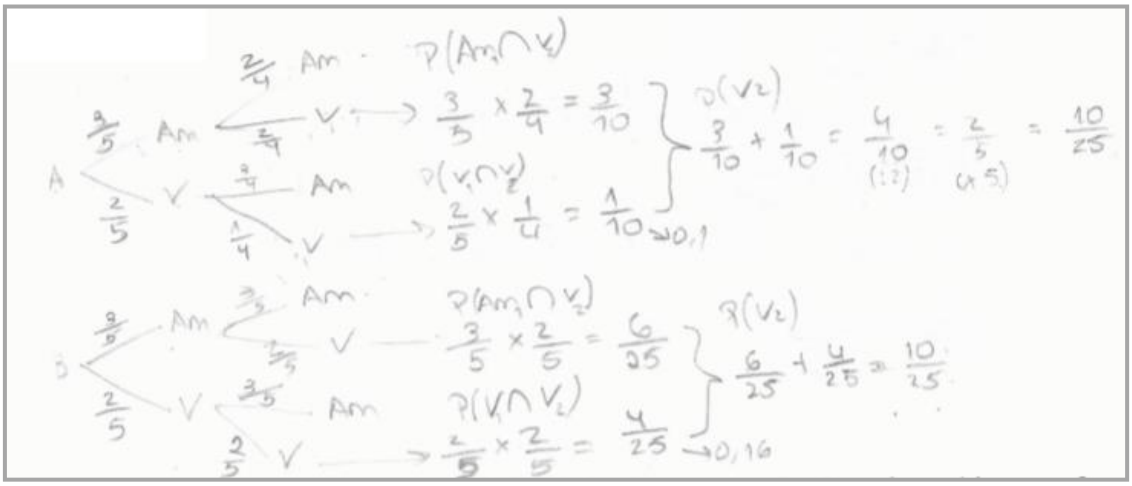


Figura 41: Resolução de Francisca e Vasco à questão 2.b. da tarefa 6

Para a experiência da equipa A não havia reposição da primeira bola. Assim, passaram a ficar 4 bolas no saco após a primeira extração tal como Francisca explicou: "Se saiu amarelo na primeira vez e eles não faziam reposição, à primeira vez tínhamos 3 bolas amarelas. Mas como calhou amarelo ficamos só com 2 amarelas dentro do saco, em 4 no total". Como, inicialmente, existiam três bolas amarelas com a extração de uma delas, o cardinal do espaço de resultados passou a ser 4 e, dessas, 2 eram bolas amarelas. Dessa forma, tal como a aluna referiu, corretamente, "$\frac{2}{4}$ é a probabilidade de sair bola amarela na segunda extração, sabendo que saiu uma bola amarela na primeira extração". Francisca e Vasco utilizaram o mesmo raciocínio para calcular os restantes valores das probabilidades de cada ramo. De seguida, verificaram em que casos tinham sido extraídas bolas verdes na segunda extração e calcularam o valor das probabilidades conjuntas, $P(V1 \cap V2)$ e $P(A1 \cap V2)$, ou seja, sair bola verde em ambas as extrações e sair uma bola amarela na primeira extração e uma bola verde na segunda extração. Essas probabilidades conjuntas foram calculadas pelo produto das probabilidades dos respetivos ramos, ou seja, por exemplo, $P(V1 \cap V2) = P(V1) \times P(V2|V1)$. Assim os alunos utilizaram a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para calcularem uma probabilidade conjunta, apresentando nível 4 no pensamento sobre Probabilidade Condicionada.

Através de uma análise às respostas à questão 2.b., podemos inferir que os alunos compreenderam que o que diferencia as experiências de cada uma das equipas são os valores das probabilidades dos segundos ramos do Diagrama em Árvore, uma vez que uma delas tinha reposição da bola extraída e a outra não. Assim, relativamente à equipa B, como havia reposição da primeira bola, os alunos constataram e concluíram que os valores das probabilidades se mantinham para a segunda extração. Tal como Francisca referiu, "Aqui vai ser 2 em 5 e 3 em 5, logo vai ficar igual. (…) Os resultados da equipa B são sempre iguais pois não há reposição". Deste modo, os alunos compreenderam que o espaço de resultados não se alterava com o resultado da primeira extração. Assim, os alunos apresentaram nível 4 (numérico) na avaliação do pensamento sobre Probabilidade Condicionada, pois demonstraram utilizar raciocínios numéricos envolvendo Probabilidades Condicionadas para o cálculo de probabilidade conjuntas e mostraram ter um controlo total, em experiências com e sem reposição, do espaço amostral.

Em suma, no que se refere às dificuldades associadas à noção de Probabilidade Condicionada, os alunos continuaram a incorrer no erro da falácia condicional transposta e a apresentar dificuldades em compreender a distinção entre a Probabilidade Condicionada e a probabilidade conjunta. Relativamente à avaliação do pensamento dos alunos sobre Probabilidade Condicionada, considero que os alunos, em geral, apresentaram nível 4, pois tal como constatámos nas resoluções, os alunos atribuíram valores numéricos em situações com e sem reposição e utilizaram raciocínios numéricos para comparar a probabilidade de acontecimentos antes e depois de cada tentativa com e sem reposição. No que se refere à conceção de Probabilidade Condicionada, nesta tarefa, os alunos apresentaram ter uma conceção cardinal, visto que utilizaram a Lei de Laplace para calcular Probabilidades Condicionadas. Como verificámos, os alunos conseguiram interpretar e resolver problemas envolvendo Probabilidades Condicionadas e probabilidades conjuntas, utilizando o Diagrama de Venn e o Diagrama de Árvore como métodso para a resolução de problemas.

5.7. Tarefa 7: "Probabilidade Condicionada 7: Problemas."

A última tarefa da minha intervenção letiva, "Probabilidade Condicionada 7: Problemas", teve como objetivo a resolução de problemas envolvendo todos os conceitos lecionados, ou seja, a noção de Probabilidade Condicionada, a noção de probabilidade conjunta e a noção de acontecimentos independentes.

Na primeira questão desta tarefa, os alunos apresentaram dificuldades de interpretação dos dados referidos no enunciado uma vez que a soma das percentagens originava um valor superior a 100%. Ainda assim, apresentaram espírito crítico e compreenderam que lhes faltava conhecer a percentagem de alunos que falavam ambas as línguas, relacionando-a ao valor que transcende os 100%, tal como referiu Vítor "os 10% a mais são os que falam as duas línguas".

A maioria dos alunos recorreu a um Diagrama de Venn para organizar os dados do enunciado e responder corretamente a esta alínea. A figura 42 mostra uma resolução representativa dos alunos da turma.

Figura 42: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.1. da tarefa 7

O facto de a maioria dos alunos ter recorrido ao Diagrama de Venn como estratégia de resolução para este problema mostra que os alunos compreenderam a importância da sua utilização.

A segunda alínea desta questão solicitava duas Probabilidades Condicionadas e uma probabilidade simples. No cálculo da probabilidade de, escolhendo um jovem ao acaso, este falar francês, sabendo-se que falava inglês, os alunos não demonstraram dificuldades, pelo que todos responderam de forma correta. Tal como mostra a figura 43, alguns alunos recorreram à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para obter o valor da probabilidade pretendida.

$$P(F|I) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} = \frac{0,10}{0,50} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

Figura 43: Resolução de Cristiano e Filipe à questão 1.2.a) da tarefa 7

Cristiano e Filipe, na sua resolução, apresentaram nível 4 na avaliação do pensamento sobre Probabilidade Condicionada visto que utilizaram raciocínios numéricos para determinarem uma Probabilidade Condicionada.

Uma outra resolução foi a de Francisca e Vasco apresentada na figura 44.

$$P(F|I) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} \Leftrightarrow P(F|I) = \frac{150}{750} = \frac{1}{5}$$

Figura 44: Resolução de Francisca e Vasco à questão 1.2.a) da tarefa 7

Francisca e Vasco também recorreram à manipulação da expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para calcularem a probabilidade solicitada. Ainda assim, determinaram corretamente essa probabilidade através do quociente entre o número de jovens que falavam ambas as línguas e o número de jovens que falavam inglês, em vez do quociente entre a probabilidade de falar ambas as línguas e a probabilidade de falar inglês. Deste modo, a resolução apresentada por estes alunos revela que têm uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada pois tendem, sistematicamente, a representar a probabilidade condicionada, $P(F|I)$, pela quantificação do quociente $\frac{card\{F \cap I\}}{card\ \{I\}}$, o que é correto apenas para o caso da equiprobabilidade.

Os restantes grupos de alunos conseguiram calcular esse valor apenas por observação do Diagrama de Venn, construído na alínea anterior, recorrendo à Lei de Laplace. Assim, a maioria dos alunos mostrou ter uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada.

Apesar da segunda probabilidade solicitada ter sido a transposta da probabilidade anterior, os alunos, contrariamente às tarefas anteriores, não tiveram dificuldades em calculá-la e todos os grupos responderam corretamente. Assim, os alunos revelaram evolução no que se refere à distinção entre uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta.

Estas duas questões sobre Probabilidade Condicionada e a sua transposta foram colocadas na tarefa com o propósito de reforçar que uma probabilidade condicionada e a sua transposta, habitualmente, tomam valores distintos, permitindo verificar que $P(F|I) \neq P(I|F)$.

A segunda questão da tarefa pretendia que os alunos calculassem a Probabilidade Condicionada de, escolhido um rebuçado ao acaso e tendo verificado que era de morango, ter sido extraído do saco azul. Esta questão originou algumas dúvidas por parte dos alunos e, dessa forma, houve poucos alunos a conseguirem resolvê-la na íntegra. Francisca, por exemplo, afirmou: "Oh professora, isto é um bocado estranho. Normalmente pedem a probabilidade do rebuçado depois de saber qual é o saco. Aqui está ao contrário!". Esta afirmação de Francisca reflete as dificuldades de muitos dos restantes alunos da turma. Como esta questão solicitava uma probabilidade que alterava a ordem sequencial dos acontecimentos, os alunos, como Francisca, consideraram-na desprovida de sentido. Assim, podemos constatar que Francisca apresentou ter uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, visto que, impôs sistematicamente uma relação temporal entre dois acontecimentos, neste caso, 'escolher o saco' e 'extrair do rebuçado'. Desta forma, a maioria dos alunos incorreu no erro da falácia da inversão do eixo temporal, dado que não conseguiram calcular a probabilidade de algo que ocorreu depois, pois consideraram que essa probabilidade não podia afetar algo que tivesse ocorrido antes.

No entanto, a maioria dos alunos, para resolver a questão 2, utilizou o Diagrama de Árvore, como se mostra na figura 45. Ainda assim, após o construírem, não calcularam a Probabilidade Condicionada solicitada. Apenas dois grupos resolveram a questão na íntegra apresentando uma resolução como a que se segue.

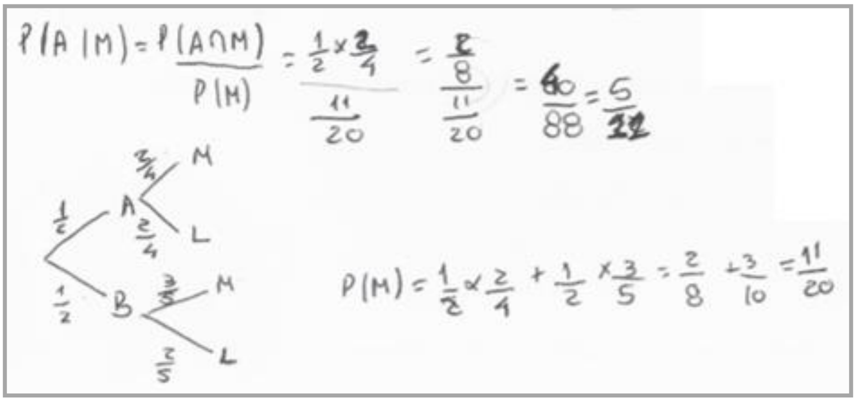


Figura 45: Resolução de Frederico à questão 2. da tarefa 7

Frederico, como se pode observar na figura 45, calculou a probabilidade de ser extraído um rebuçado de morango e, dessa forma, ainda que não o tenha explicado, somou a probabilidade de sair um rebuçado de morango e do saco azul com a probabilidade de sair um rebuçado de morango do saco branco, $P(A \cap M) + P(B \cap M)$. Assim, calculou a probabilidade de $P(A \cap M) = P(M|A) \times P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$, tal como a $P(B \cap M)$. Deste modo, o aluno utilizou a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para calcular cada uma das probabilidades conjuntas. De seguida, recorreu novamente à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada para determinar o valor da probabilidade solicitada no enunciado. Assim, revelou nível 4 (numérico) do pensamento sobre Probabilidade Condicionada pois utilizou raciocínios numéricos para interpretar situações que envolvem Probabilidades Condicionadas e mostrou monitorizar de perto a composição do espaço amostral de cada saco.

Na primeira alínea da terceira questão pretendia-se que os alunos calculassem a probabilidade de uma pessoa ser do sexo feminino, sabendo que a pessoa era daltónica. Nesta questão os alunos não apresentaram dificuldades em calcular a probabilidade requerida, pois, a sua maioria, conseguiu dar resposta, apenas através da observação dos dados na tabela. Frederico na sua resolução, figura 46, apresentou a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada. No entanto, não calculou o valor das probabilidades $P(F \cap D) e\ P(D)$ mas sim o cardinal dos conjuntos $\{F \cap D\}$ e $\{D\}$, respetivamente.

Figura 46: Resolução de Frederico à questão 3.a. da tarefa 7

Desta forma, o aluno apresentou ter uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada pois representou a Probabilidade Condicionada pela quantificação do quociente $\frac{card\ \{F \cap D\}}{card\ \{D\}}$, que originou uma resposta correta. Relativamente ao nível de pensamento sobre Probabilidade Condicionada, o aluno demonstrou ter nível 4 (numérico), pois utilizou raciocínio numérico para interpretar uma situação sobre Probabilidade Condicionada.

Na fase de discussão dos resultados, José, ao apresentar a sua resolução, explicou à turma que "já sabíamos que a pessoa era daltónica agora tínhamos de descobrir quantas eram do sexo feminino". Esta afirmação demonstra que o aluno compreendeu corretamente o espaço amostral, influenciado pelo acontecimento condicionante. Desta forma, mostrou ter uma conceção causal da Probabilidade Condicionada visto que, interpretou uma Probabilidade Condicionada como uma relação de causa-efeito, pois já se sabia que era daltónica (causa).

A questão seguinte solicitava a probabilidade de uma pessoa ser daltónica, sabendo que era do sexo masculino. Nesta questão, à semelhança da anterior, os alunos mostraram compreender corretamente a Probabilidade Condicionada solicitada e responderam de forma correta ao valor da probabilidade, como se verifica na figura seguinte.

Figura 47: Resolução de José e Mário à questão 3.b. da tarefa 7

José, no momento em que apresentou a sua resolução aos colegas, explicou que: "Já sabemos que é do sexo masculino. Logo já só nos interessa 480 pessoas". Esta afirmação evidência que o aluno compreendeu que o espaço de resultados era compreendido por apenas as 480 pessoas que eram do sexo masculino e, desses, 24 eram daltónicas. Desta forma, calculou a Probabilidade Condicionada através do quociente de 24 com 480, ou seja, apresentou uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada, uma vez que utilizou o quociente $\frac{card\{daltónico \cap masculino\}}{card\{masculino\}}$.

A alínea 3.c. solicita a probabilidade transposta da alínea anterior, ou seja, a probabilidade de uma pessoa ser do sexo masculino, sabendo que a pessoa era daltónica. Ao longo do trabalho autónomo, Vasco questionou Francisca: "Então mas a pergunta não é a mesma?", evidenciando incorrer no erro da falácia condicional transposta, uma vez que apresenta dificuldades em distinguir uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta, $P(D|M)$ e $P(M|D)$. Por sua vez, Francisca conseguiu justificar, corretamente, uma das diferenças entre ambas as probabilidades, ou seja, o espaço de resultados, influenciado pelo acontecimento condicionante. Assim, Francisca conseguiu distinguir ambas as probabilidades, revelando aprendizagens sobre Probabilidade Condicionada, tal como mostra o seguinte diálogo, no momento de discussão:

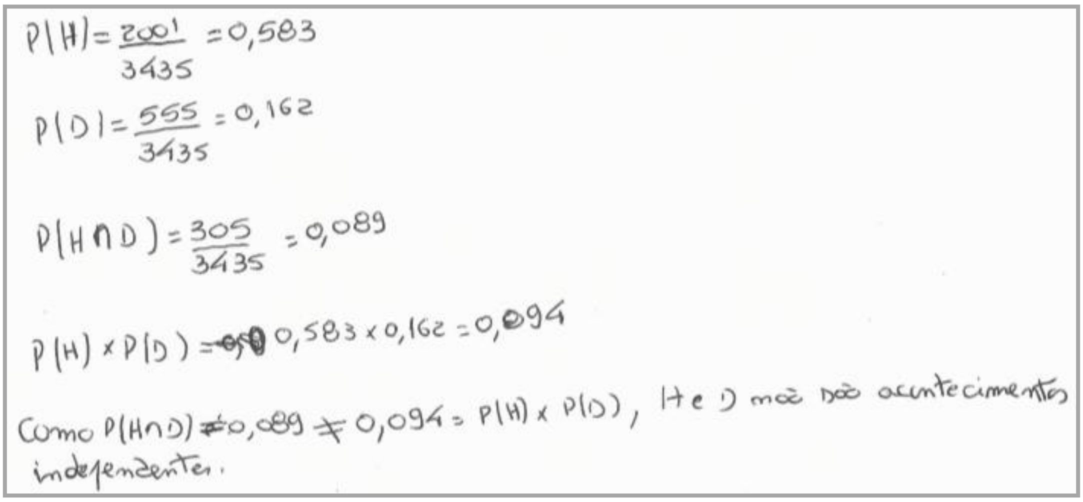
Francisca: Oh professora, mas ele está a colocar a mesma probabilidade nas duas.
Prof^{a}: Qual é a diferença entre elas?
Francisca: Muda o espaço de resultados!

À semelhança de José e Mário, os restantes grupos responderam utilizando a Lei de Laplace, fazendo o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Desta forma, os alunos obtiveram o valor correto da probabilidade solicitada, apresentando uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada e nível 4 na avaliação do pensamento sobre esta noção.

Por fim, a última questão da tarefa apresentava um quadro com resultados sobre os votos obtidos, por sexo, das quatro listas concorrentes para a eleição de uma direção e pretendia-se que os alunos verificassem se os acontecimentos "Ser um homem." e "Votar na lista D." eram ou não independentes.

Esta questão fez surgir bastantes dúvidas nos alunos, pois eles não compreendiam como é que poderiam demonstrar que dois acontecimentos eram ou não independentes. Assim interrompi a aula e recordei aos alunos que dois acontecimentos eram independentes se e só se $P(H \cap D) = P(H) \times P(D)$. Após recordar este teorema, os alunos resolveram a questão sem dificuldades, aplicando a expressão $P(H \cap D) = P(H) \times P(D)$.

Uma resposta representativa dos alunos da turma apresenta-se na figura que se segue.


$P(H) = \frac{2001}{3435} = 0,583$

$P(D) = \frac{555}{3435} = 0,162$

$P(H \cap D) = \frac{305}{3435} = 0,089$

$P(H) \times P(D) = 0,583 \times 0,162 = 0,094$

Como $P(H \cap D) = 0,089 \neq 0,094 = P(H) \times P(D)$, H e D não são acontecimentos independentes.

Figura 48: Resolução de Frederico à questão 4 da tarefa 7

Frederico calculou a probabilidade de ser do sexo masculino, $P(H)$, a probabilidade de votar na lista D, $P(D)$, e a probabilidade de ser do sexo masculino e de votar na lista D, $P(H \cap D)$. De seguida, calculou o produto da probabilidade de ser do sexo masculino com a probabilidade de votar na lista D, e concluiu, corretamente, que os acontecimentos não eram independentes. Assim, os alunos revelaram nível 4 na avaliação do pensamento sobre Probabilidade Condicionada visto que foram capazes de verificar se dois acontecimentos eram ou não independentes, ainda que implicitamente, utilizando a Probabilidade Condicionada pois o teorema sobre acontecimentos independentes parte da manipulação da sua expressão algébrica.

Em suma, relativamente ao nível na avaliação do pensamento dos alunos em Probabilidade Condicionada, considero que os alunos apresentaram nível 4. Dado que, utilizaram raciocínios numéricos para interpretarem diversas situações de Probabilidade Condicionada, monitorizaram de perto a composição do espaço amostral e reconheceram a sua importância para verificar se dois acontecimentos eram ou não independentes, como se verificou na última questão. Relativamente à conceção de caráter cognitivo sobre Probabilidade Condicionada, na questão 2, os alunos apresentaram ter uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, considerando desprovida de sentido a questão, visto que invertia a sequência temporal. Para além disso, a generalidade dos alunos, nas mais diversas questões, demonstrou ter uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada pois recorreram variadas vezes à Lei de Laplace para calcular Probabilidades Condicionadas. No que se refere à resolução de problemas, os alunos mostram utilizar o Diagrama de Venn e o Diagrama de Árvore como estratégias de resolução, evidenciando compreender a sua importância para resolver questões que envolvam Probabilidade Condicionada.

Por fim, relativamente às dificuldades demonstradas pelos alunos, aquelas que persistiram foram a dificuldade em compreender as diferenças entre a Probabilidade Condicionada e a probabilidade conjunta e a adesão ao erro da falácia condicional transposta. No entanto, desta vez, os alunos também aderiram ao erro da falácia da inversão do eixo temporal.

5.8. Minificha de avaliação

Após o término da minha intervenção letiva sobre este tema, os alunos realizaram uma minificha de avaliação cujo objetivo foi analisar as aprendizagens acerca da formalização do conceito de Probabilidade Condicionada. Deste modo, esta minificha foi realizada após terem sido resolvidas e discutidas todas as tarefas anteriormente analisadas.

A minificha de avaliação era constituída por três questões principais. Na primeira alínea da primeira questão questionava-se sobre, retirada uma peça ao acaso, a probabilidade de sair uma peça da máquina X, sabendo que era boa.

A resolução de Frederico, figura 49, é representativa da resolução de muitos outros alunos.

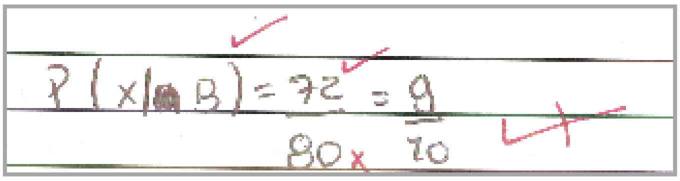


Figura 49: Resolução de Frederico à questão 1.1. da minificha versão A

Frederico apresentou corretamente, através de linguagem matemática, a probabilidade solicitada, revelando uma boa interpretação da Probabilidade Condicionada, bem como o número de casos favoráveis. No entanto, não identificou corretamente o espaço de resultados e, consequentemente, o número de casos possíveis (peças boas), que deveria ser 140 e não 80 que corresponde ao número de peças produzidas pela máquina X, calculando a probabilidade de a peça ser boa, sabendo que era da máquina X. Deste modo, Frederico calculou a transposta da Probabilidade Condicionada solicitada, ou seja, calculou $P(B|X)$ em vez de $P(X|B)$, aderindo, tal como a maioria dos alunos, ao erro da falácia condicional transposta. Esta dificuldade pode ter sido originada pois a Probabilidade Condicionada solicitada inverte a relação temporal dos acontecimentos. Posto isto, os alunos revelaram ter uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada.

Por sua vez, também houve uma percentagem de alunos que respondeu a esta questão acertadamente, identificando corretamente os casos favoráveis e os casos possíveis, figura 50.

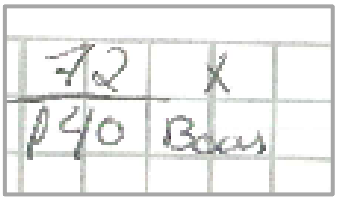


Figura 50: Resolução de César à questão 1.1. da minificha versão A

César recorreu à Lei de Laplace para calcular a Probabilidade Condicionada solicitada apresentando uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada.

A segunda alínea, da primeira questão, solicitava a probabilidade de sair uma peça defeituosa, sabendo que tinha sido produzida pela máquina Y. Nesta questão, a maioria dos alunos respondeu corretamente, como mostra a figura que se segue.

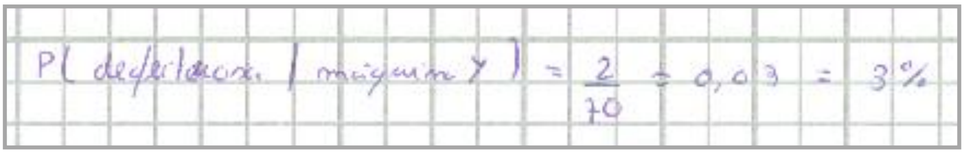


Figura 51: Resolução de Mário à questão 1.2. da minificha versão A

Mário, no cálculo da Probabilidade Condicionada solicitada, recorreu à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada. Ainda assim utilizou o quociente $\frac{card\{defeituosa \cap máquina\ Y\}}{card\{máquina\ Y\}}$, apresentando uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada, que neste caso originou o valor correto da probabilidade solicitada.

O cálculo desta probabilidade segue a sequência temporal dos acontecimentos, ou seja, pede a probabilidade da peça fabricada ser defeituosa, sabendo que foi construída pela máquina Y. Assim, numa análise às duas questões, 1.1 e 1.2, verifiquei que os alunos evidenciaram sentir mais dificuldades quando se inverte a sequência temporal, ou seja, quando se pede a probabilidade do acontecimento passado (ter sido fabricada na máquina X) conhecendo-se o acontecimento futuro (a peça era boa). Desta forma, a maioria dos alunos revelou ter uma conceção cronológica da

Probabilidade Condicionada pois uma questão que inverteu a sequência temporal foi, para eles, desprovida de sentido.

A segunda questão da minificha requeria quatro probabilidades, uma probabilidade simples, uma probabilidade conjunta e duas Probabilidades Condicionadas. A maioria dos alunos utilizou o Diagrama de Venn como estratégia de resolução desta questão. No entanto, revelaram dificuldades em construí-lo, dado que não calcularam o número de alunos que estavam inscritos em ambas as disciplinas. A figura 52 é uma resposta representativa das resoluções dos alunos da turma.

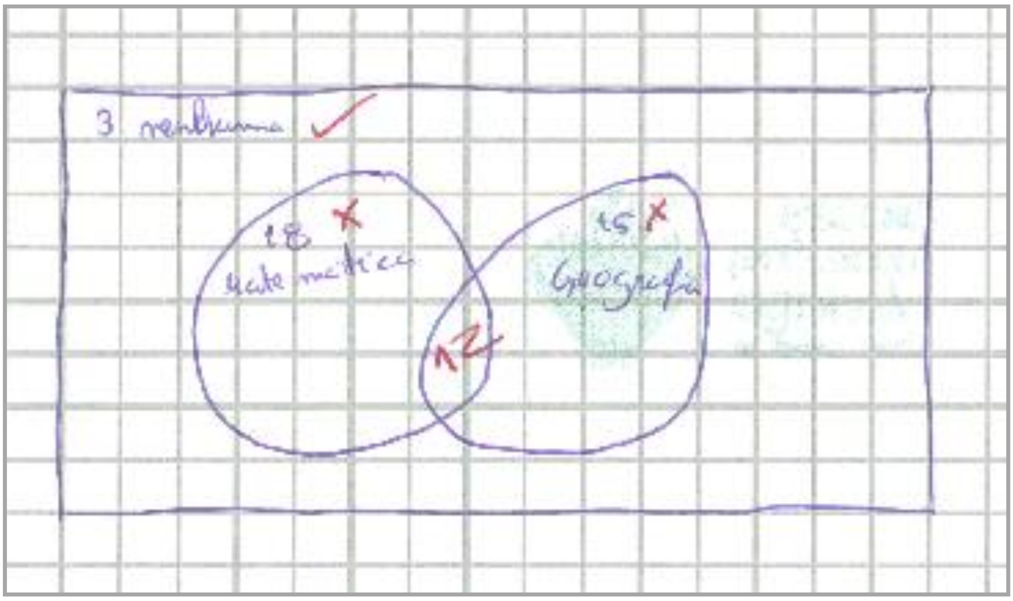


Figura 52: Resolução de Mário à questão 2.1. da minificha versão A

Tal como numa das tarefas resolvidas nas aulas, os alunos revelaram dificuldades em calcular a probabilidade de interseção entre dois acontecimentos. Dessa forma, todas as questões sobre probabilidades referentes a estes dados ficaram comprometidas.

Assim as respostas representativas dos alunos da turma foram:

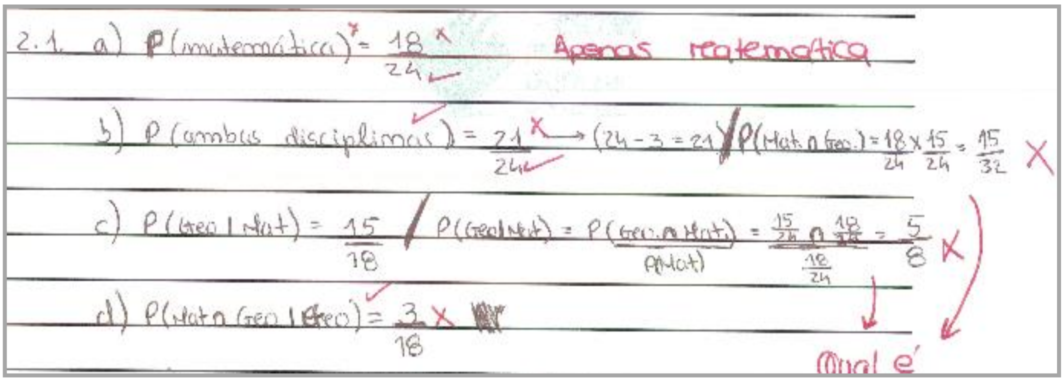


Figura 53: Resolução de Cristiano à questão 2.1. da minificha versão A

Relativamente aos dados que Cristiano representou no Diagrama de Venn, que foram iguais aos de Mário, a probabilidade de o aluno estar inscrito apenas em Matemática está correta, visto que o aluno inferiu que não existiam alunos que estivessem inscritos em ambas as disciplinas. Ainda assim, o valor calculado referia-se à probabilidade de o aluno estar inscrito em Matemática.

Na segunda alínea, o aluno calculou o número de alunos que estavam inscritos em ambas as disciplinas como sendo a subtração entre o número total de alunos com o número de alunos que não estavam inscritos em nenhuma dessas disciplinas, ou seja, 24-3=21, interpretando $P(M \cap G)$ como sendo $P(M \cup G)$. Uma outra resolução apresentada pelo mesmo aluno foi o produto das probabilidades simples, ou seja, calculou $P(Mat \cap Geo) = P(Mat) \times P(Geo)$ assumindo, de forma errada, que os acontecimentos eram independentes.

Na terceira alínea, o aluno apresentou, novamente, duas resoluções. Para uma delas, o aluno incorreu no mesmo erro da alínea anterior e calculou $P(Mat \cap Geo) = P(Mat) \times P(Geo)$, para substituir a probabilidade conjunta na expressão algébrica da Probabilidade Condicionada, originando um valor incorreto. No outro caso, o aluno apresentou uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada pois interpretou-a como sendo a proporção $P(Geo|Mat) = \frac{card\{Geo\}}{card\ \{Mat\}}$, que é geralmente falsa.

Na última questão, que questionava a probabilidade de, escolhendo um cesto e retirando um fruto ao acaso, ter saído do cesto verde, sabendo-se que tinha sido extraída uma maçã, os alunos recorreram ao Diagrama de Árvore como estratégia para resolver o problema.

Dos poucos alunos que tentaram resolver esta questão, Cristiano e César apresentaram as resoluções seguintes, figura 54 e 55, respetivamente.

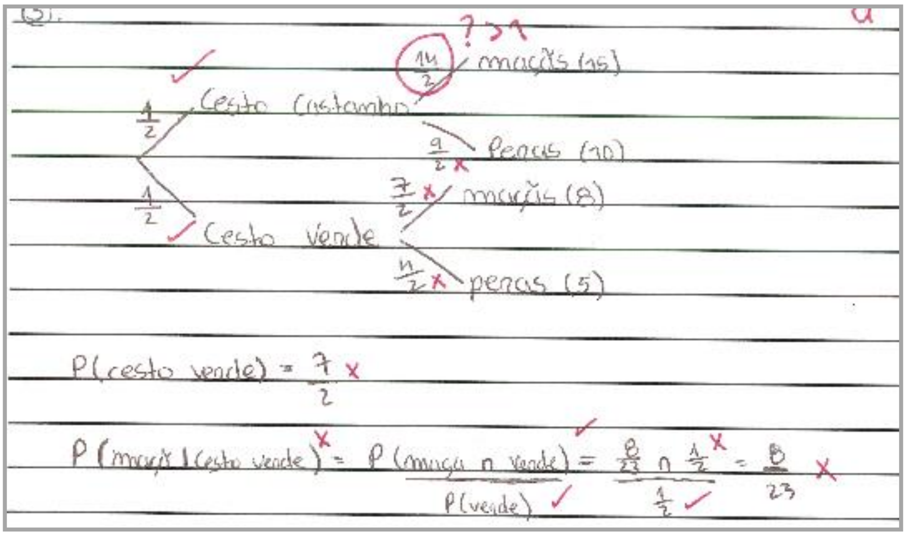


Figura 54: Resolução de Cristiano à questão 3 da minificha versão A

Cristiano construiu de forma correta o Diagrama de Árvore mas calculou as probabilidades dos segundos ramos de forma incorreta, pois não contabilizou corretamente no número de casos possíveis. Muito provavelmente, terá sido influenciado pelos valores das probabilidades dos primeiros ramos. Ainda assim colocou probabilidades com valores superiores a um, o que nunca poderia suceder. Como podemos constatar, o aluno calculou a probabilidade de sair maçã, sabendo que tinha sido extraída do cesto verde, $P(maçã|Cesto\ verde)$, ou seja, calculou a probabilidade transposta à Probabilidade Condicionada solicitada no enunciado, $P(Cesto\ verde|maçã)$. Deste modo, Cristiano incorreu no erro da falácia condicionada transposta. O aluno interpretou a questão como desprovida de sentido, visto que invertia a relação temporal dos acontecimentos, pois o acontecimento "escolha do cesto" ocorria antes da extração da maçã. Assim, como a questão solicitava uma probabilidade de um acontecimento que ocorreu antes, conhecendo-se o acontecimento futuro, o aluno não a interpretou de forma correta, apresentando ter uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada.

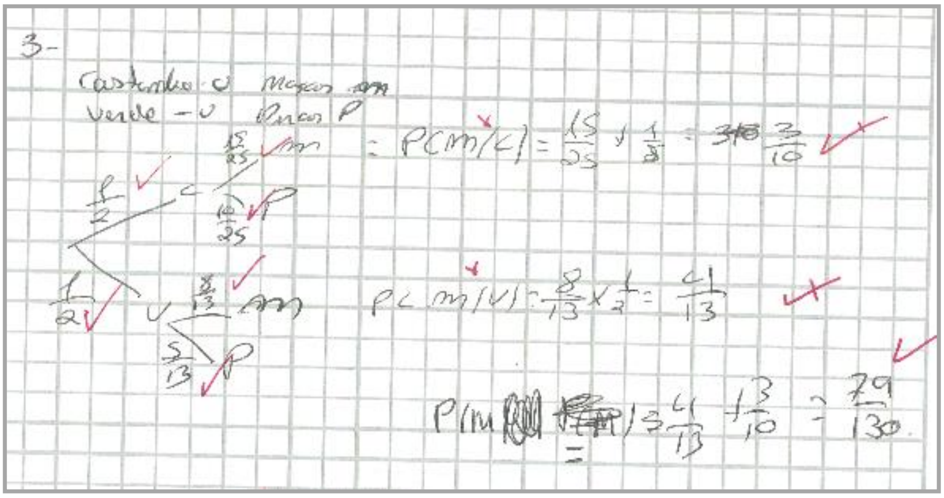


Figura 55: Resolução de Mário à questão 3 da minificha versão A

Por sua vez, Mário, na sua resolução, construiu corretamente o Diagrama de Árvore, identificando as probabilidades corretas nos ramos. Para além disso, recorreu à expressão algébrica da Probabilidade Condicionada solicitada,

$P(Cesto\ verde|maçã) = \frac{P(Cesto\ verde \cap maçã)}{P(maçã)}$. O aluno começou por calcular as probabilidades conjuntas, $P(M \cap C)$ e $P(M \cap V)$, ou seja, a probabilidade de sair maçã e ser do cesto castanho e a probabilidade de sair maçã e do cesto verde, respetivamente. No entanto, identificou essas probabilidades como sendo Probabilidades Condicionada, ou seja, a probabilidade de sair maçã, sabendo que tinha sido extraída o cesto castanho, $P(M|C)$, e a probabilidade de sair maçã, sabendo que tinha sido extraída do cesto verde, $P(M|V)$. Assim, o aluno apresentou dificuldades em distinguir uma probabilidade conjunta e uma Probabilidade Condicionada. No entanto, conseguiu calcular corretamente a probabilidade de sair maçã como sendo a soma de ambas as probabilidades mas não concluiu o seu raciocínio, dado que não calculou a Probabilidade Condicionada solicitada.

Em síntese, os alunos mostraram recorrer a Diagramas de Venn e a Diagramas de Árvore como estratégias para resolver problemas sobre Probabilidade Condicionada. Desta forma, revelaram saber quando aplicar um Diagrama de Venn e um Diagrama de Árvore, bem como compreender a sua importância na resolução de problemas. Relativamente às dificuldades, alguns alunos continuaram a revelar dificuldades em compreender as diferenças entre uma Probabilidade Condicionada e uma probabilidade conjunta e em distinguir uma Probabilidade Condicionada da sua transposta, incorrendo no erro da falácia condicional transposta. No que se refere à conceção sobre Probabilidade Condicionada, alguns alunos revelaram ter uma conceção cronológica, revelando dificuldades em calcular uma Probabilidade Condicionada que inverta a sequência temporal dos acontecimentos, e outros apresentaram uma conceção cardinal sobre Probabilidade Condicionada. Neste caso, esta conceção apenas se torna uma limitação quando os alunos calculam a Probabilidade Condicionada como sendo $P(A|B) = \frac{card\{A \cap B\}}{card\{B\}}$, dado que os acontecimentos podem não ser equiprováveis e quando calculam $P(A|B) = \frac{card\{A\}}{card\{B\}}$ que, em regra, é uma proposição falsa. Por fim, no que se refere ao nível de pensamento sobre Probabilidade Condicionada, os alunos revelaram ter nível 4 (numérico), dado que resolvem questões sobre Probabilidade Condicionada, aplicando raciocínios numéricos e, geralmente, revelam conseguir monitorizar de perto a composição do espaço amostral.

Capítulo 6

Conclusões e Reflexão Final

Neste capítulo, começo por realizar uma síntese do estudo, na qual apresento o contexto do trabalho, o objetivo e as questões do estudo e uma breve referência ao capítulo teórico e à metodologia utilizada. Seguidamente, de forma a responder às questões que formulei, e articulando com a fundamentação teórica, apresento as conclusões do estudo. Por fim, faço uma reflexão final sobre a minha intervenção e as aprendizagens dela decorrentes e algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

6.1. Síntese do Estudo

O estudo apresentado tem como base a minha intervenção letiva realizada na Escola Fernando Barros Leal, numa turma de 2.º do Ensino Profissional, no 2.º período do ano letivo 2016/2017, ao longo de nove aulas de 50 minutos, na unidade de ensino "Probabilidades", referente ao módulo A7 – Probabilidades. O tópico abordado ao longo dessas nove aulas foi a Probabilidade Condicionada que, de acordo com o Programa da Matemática para o Ensino Profissional (ME, 2004/05) em vigor, abrange a Probabilidade Condicionada, a resolução de problemas referentes a Probabilidade Condicionada, a Probabilidade de Interseção e os Acontecimentos Independentes. O trabalho desenvolvido em sala de aula foi bastante produtivo, porque os alunos se envolveram em todas as tarefas propostas durante o trabalho autónomo e revelaram-se ordeiros, participativos e interessados na discussão das questões em grupo turma. No entanto, no que se refere ao aproveitamento da turma, este carateriza-se por ser Satisfatório, uma vez que os alunos revelam algumas dificuldades por falta de conhecimentos prévios e ausência de hábitos de trabalho fora das aulas.

Com este estudo, pretendi compreender de que forma os alunos de uma turma de 2.º ano do Ensino Profissional se apropriam da noção de Probabilidade Condicionada e como a utilizam na resolução de tarefas diversificadas, ao longo de uma unidade de ensino que privilegia uma abordagem intuitiva do conceito em contextos diversos. Tendo em conta esse objetivo, e de forma a orientar-me ao longo do estudo, formulei as seguintes questões:

a) Que conceções os alunos revelam sobre a noção de Probabilidade Condicionada, ao longo da unidade de ensino? Que dificuldades evidenciam sobre esta noção?

b) Que níveis de pensamento em Probabilidade Condicionada revelam os alunos na resolução de tarefas envolvem esta noção?

c) Como é que os alunos utilizam a noção de Probabilidade Condicionada na resolução de tarefas que a envolvem? Que dificuldades evidenciam?

De modo a fundamentar o trabalho desenvolvido, bem como a análise dos dados recolhidos, foquei-me nas orientações curriculares sobre o tema em estudo, bem como na literatura de referência que aborda a noção de Probabilidade Condicionada, mais especificamente o ensino e a aprendizagem da Probabilidade Condicionada, as dificuldades dos alunos na compreensão de Probabilidade Condicionada e a importância das tarefas exploratórias e dos problemas no processo de ensino e aprendizagem das Probabilidades.

No que se refere à recolha de dados que realizei durante a lecionação da unidade de ensino, esta inclui a observação das aulas, com registo áudio e vídeo e notas de campo, a recolha documental das produções escritas dos alunos na realização de tarefas e da minificha de avaliação e, por último, a entrevista feita a três pares de alunos.

6.2. Conclusões do Estudo

6.2.1. Conceções sobre a Noção de Probabilidade Condicionada

Segundo Cunha (2010), existem três conceções de caráter cognitivo, que podem constituir entraves ao correto raciocínio em Probabilidade Condicionada: Conceção Cronológica da Probabilidade Condicionada; Conceção Causal da Probabilidade Condicionada; Conceção Cardinal da Probabilidade Condicionada. Os alunos deste estudo revelaram, em momentos diversos, as três conceções sobre a noção de Probabilidade Condicionada. Em questões que envolvem uma sequência cronológica nos acontecimentos, os alunos apresentam uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada. Por sua vez, em questões que envolvem uma relação causa-efeito entre os acontecimentos condicionante e condicionado, respetivamente, os alunos apresentam, em geral, uma conceção causal da Probabilidade Condicionada. Por último, os alunos revelam ter uma conceção cardinal da Probabilidade Condicionada, sempre que conseguem determinar a Probabilidade Condicionada sem recorrer à sua expressão algébrica. Neste estudo, a conceção mais frequente foi a conceção cardinal da Probabilidade Condicionada, dado que os alunos, frequentemente, recorreram à Lei de Laplace para calcular Probabilidades Condicionadas. Neste caso, esta tendência não fez emergir grandes dificuldades, visto que os alunos, no Ensino Secundário, lidam habitualmente com situações de equiprobabilidade. Ainda assim, futuramente, os alunos poderão apresentar dificuldades em adaptar-se a situações nas quais não haja equiprobabilidade dos acontecimentos envolvidos. Para além disto, um dos alunos que demonstrou ter esta conceção interpretou uma Probabilidade Condicionada, $P(A|B)$, como a proporção $\frac{card\{A\cap B\}}{card\{B\}}$, que geralmente é falsa (Cunha, 2010).

No que se refere à conceção causal, em geral, os alunos interpretam e definem a noção de Probabilidade Condicionada como sendo uma relação causa-efeito entre o acontecimento condicionante e o acontecimento condicionado. Segundo Cunha (2010), quando os alunos manifestam esta conceção e se lhes solicita o cálculo de uma probabilidade de uma causa conhecendo a consequência, pode ser considerada como desprovida de sentido, originando uma dificuldade para os alunos. Neste estudo, essa dificuldade não foi manifestada pelos alunos. Desta forma, concluo que esta conceção não constituiu um entrave ao correto raciocínio em Probabilidade Condicionada.

Os alunos, por diversas vezes, também apresentaram uma conceção cronológica da Probabilidade Condicionada, visto que interpretaram Probabilidades Condicionadas através de uma relação temporal entre os dois acontecimentos. Tal facto, originou, tal como Cunha (2010) havia previsto, dificuldades em questões que inverteram a sequência temporal, isto é, em calcular probabilidades de acontecimentos passados quando era conhecido o acontecimento futuro. No entanto, ao longo da intervenção letiva, os alunos mostraram compreender que se podia calcular uma probabilidade de um acontecimento passado, conhecido o acontecimento futuro. Deste modo, nas últimas tarefas implementadas essa interpretação já não é tão frequente, sendo que os alunos evidenciam progressos na interpretação das probabilidades condicionadas requeridas.

Por fim, concluo que os alunos demonstraram ter várias conceções sobre Probabilidade Condicionada, durante a minha intervenção letiva. Para além disso, os alunos mostraram ter uma evolução positiva nas dificuldades associadas às conceções adquiridas sobre Probabilidade Condicionada, especificamente, às dificuldades associadas a uma conceção cronológica. Deste modo, revelaram aprendizagens significativas na noção de Probabilidade Condicionada, ao longo das nove aulas, dado que, mostraram conseguir identificar Probabilidades Condicionadas, compreender os espaços de resultados e, por último, mostraram-se capazes de identificar, os acontecimentos condicionantes e os condicionados, interpretando corretamente as Probabilidades Condicionadas solicitadas.

6.2.2. Níveis de Pensamento em Probabilidade Condicionada, na Resolução de Tarefas que Envolvem esta Noção

O conceito de Probabilidade Condicionada é central no pensamento probabilístico (Fernandes, Batanero, Correia & Gea, 2014), apesar de ser um dos conceitos no qual os alunos sentem mais dificuldades (Fernandes, 2001). Neste sentido, e dada a importância de estudar os raciocínios e as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem o conceito, Tarr e Lannin (2005) estabeleceram quatro níveis de pensamento dos alunos sobre Probabilidade Condicionada.

De acordo com os níveis criados por Tarr e Lannin (2005), e dada a sua caraterização, posso concluir que os alunos deste estudo apresentaram nível 3 (Quantitativo Informal) e nível 4 (Numérico) na avaliação do pensamento sobre Probabilidade Condicionada.

Neste estudo, os alunos apresentaram manter uma noção intuitiva de Probabilidade Condicionada, no sentido de consistir na probabilidade de um acontecimento ocorrer na condição de se ter conhecimento prévio sobre outro.

Na primeira tarefa, sem ter sido lecionada a noção formal de Probabilidade Condicionada, os alunos já se tinham mostrado capazes de calcular uma Probabilidade Condicionada, recorrendo, para tal, à sua intuição e a raciocínios probabilísticos. Para além disso, os alunos mostraram-se capazes de utilizarem raciocínios numéricos para calcular Probabilidades Condicionadas, transformando-as em Probabilidades simples, visto que, ainda não tinham conhecimento acerca da noção de Probabilidade Condicionada.

Pelo que, ao longo da primeira tarefa, os alunos mostraram reconhecer que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera em situações de não reposição e evidenciaram manter o controlo da composição total do espaço amostral para relacionar dois acontecimentos em situações sem reposição, evidenciando um pensamento sobre Probabilidade Condicionada de nível 3.

No entanto, ao longo da intervenção letiva, a maioria dos alunos revelou progredir para o nível 4, dado que começaram a atribuir probabilidades numéricas em situações com e sem reposição, utilizaram raciocínios numéricos para interpretarem situações de Probabilidade Condicionada e reconheceram a importância que os números desempenham para verificar se dois acontecimentos são ou não independentes, de acordo com o teorema sobre acontecimentos independentes, usando a expressão algébrica da Probabilidade Condicionada.

Desta forma, concluo que a lecionação da noção formal de Probabilidade Condicionada foi importante para promover uma evolução no nível dos raciocínios apresentados pelos alunos. Assim, considero que o facto de os alunos terem recorrido à sua intuição como ponto de partida para a aprendizagem, proporcionou aprendizagens significativas sobre a noção de Probabilidade Condicionada, eliminando possíveis raciocínios intuitivos erróneos.

6.2.3. Utilização da Noção de Probabilidade Condicionada na Resolução de Tarefas

Analisando as resoluções dos alunos, verificamos um grande recurso ao Diagrama de Venn e ao Diagrama de Árvore como ferramenta para organizar os dados, facilitando a compreensão da experiência enunciada bem como as suas estratégias conducentes ao resultado final. Os alunos, deste estudo, já sabiam, previamente, construir o Diagrama de Árvore, no entanto, não associavam as probabilidades dos segundos ramos a Probabilidades Condicionadas. Deste modo, concluo que os alunos revelaram aprendizagens na construção de um Diagrama de Árvore e revelaram compreender a sua importância no estudo das Probabilidades, mais especificamente, na Probabilidade Condicionada como defendia o Programa de Matemática para o Ensino Profissional em vigor (ME 2004/05), aprofundando os seus conhecimentos sobre esta estratégias de resolução de problemas.

Assim no que se refere às estratégias usadas pelos alunos para justificarem as suas respostas salientou-se o recurso ao Diagrama de Árvore, ao Diagrama de Venn, à fórmula da probabilidade condicionada, à lei de Laplace e à regra do produto.

Como defendia Fernandes, Correia e Contreras (2013) no seu estudo, a importância da noção de Probabilidade Condicionada contrasta com as dificuldades que os alunos experienciam na sua aprendizagem, sendo que as suas ideias erróneas não tendem a desaparecer simplesmente a partir do desenvolvimento cognitivo espontâneo dos alunos.

Relativamente às dificuldades que os alunos revelaram ao longo da intervenção, a mais frequente e aquela que se manteve após a lecionação de todo o tema foi a dificuldade em compreender as diferenças entre uma Probabilidade Condicionada e uma Probabilidade Conjunta. Na origem desse erro pode estar a dificuldade dos alunos em interpretarem enunciados de problemas que impliquem a identificação dessas probabilidades. Assim, os alunos determinaram Probabilidades Conjuntas quando lhes era pedida uma Probabilidade Condicionada e uma Probabilidade Condicionada quando lhes era requerida uma Probabilidade Conjunta, erro que é também bastante frequente em vários estudos da literatura, tais como, Correia et al (2011). Ainda assim, os alunos revelaram mais dificuldades em calcular Probabilidades Condicionadas do que Probabilidades Conjuntas, ao contrário de outros estudos da literatura, por exemplo, Fernandes, Correia e Contreras (2013). Isso pode ter sido resultado de os alunos terem aprendido a noção de Probabilidade Conjunta antes da noção de Probabilidade Condicionada, no 9.º ano de escolaridade. Para além disso, uma possível causa para a existência de maiores dificuldades em Probabilidade Condicionada, neste estudo, pode dever-se porque a abordagem à definição formal de Probabilidade Condicionada envolveu a definição de Probabilidade Conjunta, que já tinha sido lecionada previamente. Assim, concluo que, como Fernandes, Correia e Contreras (2013) e Watson (1995) defendem, o ensino do conceito de Probabilidade Condicionada podia ser antecipado para o 9.º ano, passando a integrar o programa da disciplina de Matemática do Ensino Básico.

Uma outra dificuldade também revelada pelos alunos, , tal como constatou Falk (1985), foi em distinguir uma Probabilidade Condicionada e a sua transposta, aderindo ao erro da falácia condicional transposta. Uma possível explicação para este erro dos alunos foi dada por Falk (1985), pois considerou que a linguagem corrente utilizada nos enunciados dos problemas não é suficientemente precisa. Deste modo, quando escrevemos a probabilidade condicionada utilizando a linguagem matemática não restam dúvidas qual o acontecimento condicionado e o condicionante, mas na linguagem corrente essa distinção não é tão clara. Assim, estes alunos revelaram dificuldades na interpretação e identificação do acontecimento condicionado e condicionante duma questão que envolva Probabilidades Condicionadas.

Por fim, ainda no que se refere às dificuldades que evidenciaram, uma pequena parte dos alunos incorreu nos seguintes erros: obtenção de probabilidades superiores à unidade, considerarem acontecimentos independentes efetuando o produto para o cálculo de probabilidades conjuntas, erro da falácia da inversão do eixo temporal, dado que assumem que a probabilidade de algo que ocorre depois não pode afetar algo que ocorreu antes, e dificuldades provenientes de ignorar o acontecimento condicionante, recorrendo a probabilidades de experiências simples implicadas na experiência composta, tal como no estudo de Díaz (2009).

Durante as entrevistas que realizei, os três pares de alunos revelaram que algumas destas dificuldades ainda se mantiveram após a lecionação, nomeadamente, continuaram a confundir uma probabilidade conjunta com uma probabilidade condicionada, a ter dificuldades em compreender as diferenças entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta e, por último, mostraram dificuldades em interpretar situações que invertessem a ordem sequencial dos acontecimentos.

Em síntese, os resultados obtidos neste estudo leva-nos a concluir que o conceito de Probabilidade Condicionada é um conceito difícil para os alunos, tal como é referenciado na literatura, Tarr & Lannin (2005).

6.3. Reflexão final

Após concluir este trabalho considero fundamental fazer uma reflexão sobre as minhas aprendizagens e as dos alunos, sobre a unidade de ensino que lecionei e as estratégias que utilizei e, por último, sobre futuros trabalhos e questões que ficaram em aberto.

A experiência de lecionar com a orientação da minha professora cooperante e dos meus professores orientadores foi bastante importante para o meu futuro, tanto em termos profissionais como pessoais. Deste modo, quero começar por dizer que esta foi uma experiência bastante enriquecedora pois tive a oportunidade de trabalhar num contexto, no qual nunca tinha estado inserida, o Ensino Profissional. Assim, esta experiência permitiu-me integrar uma escola e uma turma diferente do Ensino Regular, e conhecer e explorar o Programa do Ensino Profissional (2004/05). Tive o privilégio de trabalhar com uma excelente professora cooperante que me proporcionou variadas intervenções letivas que foram fundamentais para a minha experiência como futura professora. Assim, desde o início do ano letivo, desenvolvi um relacionamento de proximidade com a turma, o que me facilitou a lecionação e tornou a minha experiência mais completa e benéfica para mim. Dado que, me permitiu explorar os raciocínios, as dificuldades e as resoluções dos alunos ao longo de todo o ano letivo, ficando a conhecê-los melhor, a nível de conhecimentos prévios e de métodos de trabalho. Assim, esta experiência permitiu-me prever melhor as dificuldades dos alunos, adaptando as aulas da minha lecionação de acordo com as suas necessidades. Deste modo, fui aprendendo a lidar com o desafio que cada aula nos traz, revelando melhorias significativas em relação à gestão da aula e às minhas intervenções, de aula para aula, segundo os professores orientadores e a professora cooperante.

Assim, ao longo deste ano letivo, considero que cresci profissionalmente, uma vez que consegui aplicar diversas tarefas em aula e refletir sobre os benefícios, as limitações e as futuras melhorias de cada uma delas. A partir do trabalho desenvolvido com estes alunos pude observar a importância e as vantagens do trabalho de grupo, dos diversos momentos da aula, especificamente, a importância de uma boa discussão de resultados. Para além disso, no que se refere às Probabilidades, tive oportunidade de trabalhar com materiais manipuláveis o que gerou bastante interesse, motivação e empenho por parte dos alunos, originando aprendizagens nos alunos mais significativas. Dado que, permitiram aos alunos visualizar um conceito abstrato, com recurso a uma experiência. Deste modo, considero que uma abordagem intuitiva e com recurso a experiências, que utilizem materiais manipuláveis, torna o processo de aprendizagem mais marcante para os alunos, originando aprendizagens significativas, em aulas onde os alunos ocupam um papel central, podendo originar o gosto pela Matemática.

Relativamente às aprendizagens dos alunos, considero que realizaram aprendizagens significativas e enriquecedoras apesar do grau de dificuldade do tema em questão. Deste modo, concluo que, apesar de ser um conceito de difícil aprendizagem, a minha lecionação foi adequada, tendo conseguido que os alunos compreendessem a noção de Probabilidade Condicionada e a utilizassem na resolução de problemas, usando como suporte as tarefas e os *PowerPoints* que construi e planeei cuidadosamente. Com o intuito de proporcionar aos alunos momentos de aprendizagem significativos, tentei elaborar um conjunto de tarefas diversificadas, integrando, problemas, exercícios e tarefas exploratórias, tendo sempre em consideração os interesses dos alunos bem como o seu meio envolvente. Verifiquei que, ao utilizar tarefas, em contexto real consegui focar os alunos despertando-lhes interesse. Assim, dado que as tarefas incluíam questões orientadores, permitiram aos alunos serem os construtores dos seus novos conhecimentos, levando-os a inferir as propriedades e os teoremas associados a este tema. Para além disso, as tarefas permitiram aos alunos terem contacto com diversas estratégias de resolução de problemas. Com esta intenção, criei e adaptei diversas tarefas em contextos diversos, abrangendo problemas, exercícios e tarefas exploratórias, permitindo aos alunos aplicar os seus conhecimentos em diversas situações. Dado que, um conceito apenas é apreendido pelos alunos, quando eles o conseguem aplicar nas diversas situações. Deste modo, proporcionei momentos importantes e diversificados para originar aprendizagens significativas.

Uma das maiores dificuldades na minha intervenção letiva, tanto na elaboração das tarefas como na implementação das mesmas, esteve relacionada com a gestão dos tempos, tanto a nível da sala de aula, como a nível da extensão da tarefa. Neste sentido, fui melhorando e adaptando a minha planificação feita aula a aula. Desta forma considero que um dos maiores desafios diários na vida de um professor é exercer o papel de gestor, tanto a nível de organização como a nível de planificação e elaboração das tarefas. Dessa forma concluo que é essencial que o professor: escolha criteriosamente as tarefas, tendo em conta os interesses dos alunos e o meio onde eles estão inseridos; faça uma planificação detalhada da aula, de forma a conseguir gerir sem desperdício de tempo; preveja e controle as intervenções dos alunos; resista a validar respostas e resoluções dos alunos; evite estender o trabalho autónomo e, por último, mas não menos importante, que favoreça a discussão coletiva. Para além disso, considero que todas as aulas devem ser posteriormente refletidas, pois isso permitiu-me analisar e adaptar as aulas seguintes às necessidades que se fizeram sentir, de forma a otimizar e melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Em termos de estratégias que utilizei reforço que dividir as aulas em três grandes momentos – Introdução da tarefa, Trabalho autónomo dos alunos e Discussão e Sistematização de resultados – torna-se crucial para um bom desenvolvimento e aproveitamento da aula. O momento de trabalho autónomo é fundamental para os alunos terem espaço para debater, explorar e conjeturar, tentando resolver as tarefas, promovendo capacidades transversais como a comunicação matemática, a capacidade argumentativa e o espirito de entreajuda. Os momentos de discussão e sistematização de resultados eram bastante proveitosos, porém mais difíceis de gerir. No entanto, tentei sempre tirar partido das ideias dos alunos, que permitiam desenvolver capacidades e explorar conceitos e ideias matemáticas bem como suscitar debates interessantes que levassem os alunos a aprendizagens significativas.

Em suma, uma das maiores aprendizagens que retive neste estudo é que os professores devem partir das intuições dos alunos, ainda que sejam erróneos, e dos seus conhecimentos prévios para construir e consolidar os novos conhecimentos.

Relativamente à minha intervenção, no que respeita à promoção de aprendizagens neste tópico, considero que foi adequada, dado que, em geral, os alunos revelaram aprendizagens significativas neste tema. No entanto, caso fosse uma intervenção mais longa, relativamente ao número de aulas, iria incluir novas tarefas que focassem os alunos nas diferenças entre a Probabilidade Condicionada e a Probabilidade Conjunta, tentando combater as dificuldades reveladas por eles ao longo da intervenção letiva.

Por último, vou refletir sobre possíveis trabalhos futuros e questões que tenham ficado em aberto, considerando os resultados do presente estudo e tendo em vista aprofundar o conhecimento no âmbito da problemática aqui abordada. Relativamente ao tema da Probabilidade Condicionada seria importante efetuar um estudo individual sobre os raciocínios dos alunos nas resoluções de problemas associados a esta temática, de forma a verificar o que poderá estar na origem das dificuldades reveladas pelos alunos. Para além disso, também seria relevante verificar qual a influência dos métodos de ensino nas aprendizagens associadas à noção de Probabilidade Condicionada. Por fim, acho igualmente importante estudar a compreensão da noção de Probabilidade Condicionada em alunos do ensino básico, aquando a lecionação da probabilidade conjunta, de forma a tentar solucionar as dificuldades que eles revelam em distingui-las.

Referências

Andrade, C., Viegas, C., Pereira, P.P. & Pimenta P. (2012). *Ípsilon – Matemática A,* 12.º ano. Volume I. Texto Editora

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales¿ Qué contenidos se debe ensenar en la clase de probabilidad. *Fernandes, J., Sousa, M. & S. Ribeiro (Orgs.), Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística–Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-30.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3).

Batanero, C., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, *62*, 11-18.

Becker, H. S., & Geer, B. (1969). Participant observation and interviewing: a comparison. In J. G. McCall, & J. L. Simmons (Eds), Issues in participant observation: a text and reader (pp.322-331). Reading, MA: Addison-Wesley.

Bernardes, O. (1987). Para uma abordagem do conceito de probabilidade. *Educação & Matemática*, (3).

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (2).

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. *Investigação em educação matemática*, 255-266.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas.

Canaveze, L. (2013). O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP.

Carvalho, C., & Fernandes, J. A. (2005). Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da psicologia. *Revista Quadrante*, *14*(2), 71-88.

Carvalho, B. V. D. A., & Fernandes, J. A. (2009). O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didáctico de uma professora em Combinatória.

Carvalho, M. J. D. O. R. (2013). *Ensino e aprendizagem de probabilidade condicionada e independência* (Master's thesis, Universidade de Aveiro).

Castro, C. S. (1998). Teaching Probability for Conceptual Change La Enseñanza De La Probabilidad Por Cambio Conceptual. *Educational studies in mathematics*, *35*(3), 233-254.

Cohen, C., Manion, L., & Morrison, K. (2000). Research methods in education.

Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. *XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço – Matemática A*, 12.º ano. Volume I. Porto Editora.

Cunha, M. D. C. (2010). *A influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12º ano de escolaridade em probabilidade condicionada* (Doctoral dissertation).

Díaz Godino, J., del Carmen, B. B. M., & Cañizares Castellanos, M. (1996). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid.

Díaz, C. & de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. Epsilon, 59, 245-260.

Díaz Batanero, C. (2007). Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.

Díaz, C. (2009). Sesgos en probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Actas do II encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 100-116.

Eves, H. W. (1995). *Introdução à história da matemática*. Unicamp.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297).

Fernandes, J. A. (1999). Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9. º ano de escolaridade.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8. º e 11. º anos de escolaridade. *Quadrante, 10*(2), 3-32.

Fernandes, J. A., & Barros, P. M. P. D. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1. º e 2. º ciclos em estocástica.

Fernandes, D., & Nóvoa, A. (2005). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante, XVIII, 1*, 161-183.

Fernandes, J. A., Nascimento, M. M., Cunha, M. D. C., & Contreras, J. M. (2011). Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12º ano através do ensino. *In XIII Conferência Interamericana De Educação Matemática*. Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

Fernandes, J. A., Batanero, C., & Cañadas, G. (2013). Determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas por alunos futuros educadores e professores do ensino básico. *XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM)*, 141-154.

Fernandes, J. A., Correia, P. F., & Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (4).

Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F., & Gea, M. M. (2014). Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, *23*(1), 43-61.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., & Viseu, F. (2015). Avaliação de probabilidades condicionadas em contextos sociais. *2ª Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 153-161.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F., & Gea, M. M. (2016). Comparação de probabilidades de acontecimentos formulados de forma explícita e implícita. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *10*(2), 42-60.

Fernandes, C., & Ponte, J. P. O uso de simulações para desenvolver a noção de probabilidade e a capacidade de resolução de problemas.

Figueiredo, A. D. C. (2000). Probabilidade condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem.

Fischbein, H. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Vol. 85). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational studies in mathematics*, *15*(1), 1-24.

Garfield, J. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 25-34.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Moll, V. F. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*, 47-78.

Guilherme, I. M. D. N. V. (2011). *Applets no ensino da probabilidade condicionada* (Master's thesis, Universidade de Aveiro).

Guimarães, H., Martins, A., Figueiral, L. & Abreu, M. (2013). Aprender Matemática: porquê e para quê?. *Educação e Matemática*. 125, 61-71.

Graça Martins, E. (2013), WikiCiências, 4(01):0763. Consultado em setembro 13, 2017 em: http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Probabilidade

Henriques, A., & Nascimento, M. M. (2013). Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística. *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.*

Lima, R. C., Bezerra, F. J. B., Valverde, M. A. H., & Gama, E. D. C. USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS: A OFICINA “MÃE DINADA” COMO INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA.

Longo, E. & Branco, I. *MACS do 11º ano – Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Texto.

Lopes, C. E., & Meirelles, E. (2005). O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. *XVIII ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA–LEM/IMECC/UNICAMP–2005.*

Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cad. Cedes, Campinas*, *28*(74), 57-73.

Magro, F., Fidalgo, F., Costa, M. & Louçano, P. (2015). *Matemática A7 – Probabilidade (PerCursos Profissionais). ASA*

ME (1991). *Programa de Matemática Ensino Básico.* Lisboa: Autor.

ME (1997). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Autor.

ME (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (10.º, 11.º e 12.º anos).* Lisboa: Autor.

ME (2002). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Autor.

ME (2004/05). *Programa de Matemática dos Cursos Profissionais de Nível Secundário.* Lisboa: Autor.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Autor.

ME (2012). *Programa de Matemática A do Ensino Secundário.* Lisboa: Autor.

ME (2013). *Programa e Metas de Matemática A do Ensino Secundário do Curso Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*.. Lisboa: Autor.

Murteira, B. & Antunes, M. (2012). *Probabilidade e Estatística*. Volume I. Lisboa: Escolar Editora.

NCTM (1978). *Princípios e noemas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

NCTM (1980). *Princípios e noemas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

NCTM (1991). *Princípios e noemas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

NCTM (1999). *Princípios e noemas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

NCTM (2000). *Princípios e noemas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

NCTM (2007). *Princípios e noemas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

NCTM (2008). *Princípios e noemas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

Neto, M. T. B. (2009). O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do Ensino Secundário: Recurso a geometrias planas.

Neves, M., Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L. & Silva, M. (2015). *Matemática A7 – Probabilidade. Ensino Profissional*. Porto Editora.

Neves, M. A., Pereira, A. & Silva, J. N. (2012). *Probabilidade - Matemática A, 12.º ano*. Volume I. Porto Editora.

Oliveira, J. C. (2012). *Preparo o exame nacional – Matemática A, 12º ano*. Areal Editores.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3. º ciclo para a construção de um quadro de referência.

Pestana, D. D. & Velosa, S. Filipe (2010). *Introdução à probabilidade e à estatística*. Volume I, 4ª Edição. Fundação Calouste GulbenKian.

Ponte, J. P. D., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da estatística: Análise comparativa de três países. *Quadrante*, 93-115.

Ponte, J. P. D. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, 11-34.

Ponte, J. P. (2006). *Programas de matemática no 3o ciclo do ensino básico: um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal*. Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C. & Varandas, J. M. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2).

Princípios, N. C. T. M. (1978). normas para a Matemática escolar. *Lisboa: APM*

Princípios, N. C. T. M. (1980). normas para a Matemática escolar. *Lisboa: APM*

Princípios, N. C. T. M. (1991). normas para a Matemática escolar. *Lisboa: APM*

Salomé, H., Silva, L., Martins A. & Dias, T. (2010). *Matemática A7 – Probabilidade (Cursos Profissionais de Nível Secundário)*. Lisboa Editora.

Santos, J. A. F. L. (2001). O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental. *Actas del VII CIBEM ISSN*, *2301*, 0797.

Santos, J. A. F. L. (2008). Probabilidade e Tarefas Exploratório-Investigativas: mobilização e produção de saberes nas aulas de matemática.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of'well-taught'mathematics courses. *Educational psychologist*, *23*(2), 145-166.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender Matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Sobreiro, D. M. F. (2011). *Probalidade condicionada: um estudo com alunos do ensino secundário* (Master's thesis, Universidade de Aveiro).

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence?. In *Exploring Probability in School* (pp. 215-238). Springer US.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological review*, *90*(4), 293.

Valdemarin, V. T. (2001). Ensino da leitura no método intuitivo: as palavras como unidade de compreensão e sentido. *Educar em Revista*, 157-182.

Vila, A. & Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução Ernani Rosa*. Porto Alegre: Artmed.

Watson, J. M. (1995). Conditional probability: Its place in the mathematics curriculum. *The Mathematics Teacher*, *88*(1), 12-17.

Anexos

Anexo 1: Plano de aula 1

Plano de Aula - 7 de fevereiro de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Resolução de uma tarefa sobre probabilidade condicionada. ➢ Probabilidade Condicionada.

Objetivos
➢ Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos utilizando a noção de probabilidade condicionada.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos (interseção).

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em suporte papel; ➢ Manual; ➢ *PowerPoint* “Probabilidade Condicionada 1”. ➢ Excel “Probabilidade Condicionada 1”	➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em suporte papel; ➢ Saco com as bolas brancas e laranjas, numeradas de 1 a 10; ➢ Vendas pretas.

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas” irá ser realizada pelos alunos em grupos de 4 ou 5 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos. ➢ Através do *PowerPoint* “Probabilidade Condicionada 1” irá ser introduzida a fórmula da probabilidade condicionada e a sua respetiva interpretação.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
    ➢ Pontualidade;
    ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
    ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
    ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
    ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
    ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	Tempo Previsto (min)
(1) Início da aula.	5
(2) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”.	5
(3) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”.	20
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”.	15
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com a distribuição dos materiais que os alunos irão necessitar de utilizar para a resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”. A professora irá pedir aos alunos, que não mexam no material que está a ser distribuído na tentativa de lhes despertar algum interesse para que, rapidamente, se forme um ambiente favorável ao início da aula. Após a entrada dos alunos e já com o material distribuído, a professora irá pedir aos alunos que formem grupos de 4 a 5 alunos consoante o número total de alunos presentes na sala de aula.

(2) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”

Nesta fase a professora irá distribuir a tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo. A professora irá informar que realizarão a tarefa nos grupos formados e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde um aluno de cada grupo, escolhidos pela professora, irá apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparados os diferentes resultados e as diferentes resoluções/estratégias.

Os alunos terão um breve momento para ler a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições. De seguida, a professora irá escolher um aluno para exemplificar a experiência que deverão realizar durante a tarefa de forma a tentar garantir que a experiência ocorre de acordo com o expetável.

Por último ficará definido 20 minutos de trabalho de grupo para a realização da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(3) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”

Ao longo deste momento, a professora irá estar a circular pela sala, de forma a esclarecer eventuais dúvidas e a verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa. Para além disso, irá certificar-se que os grupos compreenderam a experiência que irão ter de realizar. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções e dificuldades estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(4) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e resultados de todos os grupos. A professora irá escolher um aluno de cada grupo e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se o conceito ficou compreendido por todos. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

Após a apresentação e discussão de resultados dos grupos, a professora irá, com o auxílio do *PowerPoint* “Probabilidade Condicionada 1”, questionar os alunos para garantir que estes compreenderam a noção de probabilidade condicionada. Para além disso a professora vai solicitar a um aluno da turma que faça uma possível questão a um outro aluno acerca da tarefa em causa. Por fim, a professora irá introduzir a fórmula da probabilidade condicionada, sintetizando a sua interpretação com a ajuda dos alunos e das suas aprendizagens realizadas durante a tarefa.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(5) Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 2 (Resolução da ficha de trabalho – Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas)

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:___________________________________ Nº______

Nome:___________________________________ Nº______ Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas

1. Para realizar uma experiência recebeste um saco com dez bolas, numeradas de 1 a 10.

Do número 1 ao 5 as bolas são brancas e do número 6 ao 10 as bolas são laranja.

a) Diz qual é a probabilidade do número da segunda bola retirada ser par sabendo que o número da primeira bola retirada não é par e explica a tua resposta.

Resolução:

No saco há 10 bolas, das quais 5 são pares (2,4,6,8,10) e 5 são ímpares (1,3,5,7,9). Sendo que o número da primeira bola retirada não é par, então será ímpar. Assim, na segunda extração já só haverá 4 bolas ímpares e 5 bolas pares, ou seja, 9 bolas.

Logo, a probabilidade da segunda bola retirada ter o número par é 5/9. Pela regra de Laplace, para acontecimentos equiprováveis, a probabilidade é o quociente entre o número de casos favoráveis (5 bolas pares) e o número de casos possíveis (9 bolas).

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Perceber que em experiências sem reposição o espaço amostral varia.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: “Após a primeira extração quantas bolas ficam no saco?” “E se retirássemos 3 bolas, quantas ficariam?” “Tiramos a bola e voltamos a colocá-la dentro do saco? É uma experiência com ou sem reposição?”
Calcular o número casos favoráveis.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: “Quais são as bolas que estão no saco antes da primeira tiragem? E após? Quantas dessas bolas são pares e ímpares?”

Discussão:

“Após termos retirado a primeira bola quantas bolas com número par ficaram no saco?”

“Como é que se calcula a probabilidade de um acontecimento?”

“E se em vez de sair ímpar, na primeira extração, saísse par?” (A probabilidade passava a ser 4/9)

b) Tira uma bola com número ímpar do saco. De seguida executa a experiência de retirar a segunda bola do saco aleatoriamente, com o teu grupo, 20 vezes. Regista os resultados que obtiveste e tira uma conclusão desses resultados.

Resolução:

Possível Conclusão:

Numa experiência sem reposição, após a primeira extração o espaço de resultados altera-se.

Em experiências sem reposição, a probabilidade da segunda extração é dependente da primeira extração.

Quantas mais vezes se fizer a experiência o valor da probabilidade tende a aproximar-se ao valor da probabilidade calculado na alínea anterior (5/9).

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Calcular a probabilidade pedida de acordo com os dados recolhidos.	A professora deve questionar os alunos levando-os à resposta, autonomamente: "Quantas bolas com o número par saíram?" "Quantas extrações fizeste?" "Neste caso qual é a probabilidade?"

Discussão:

"Nos vossos registos que números obtiveram? Que probabilidade obtiveram?"

"O que é que podemos concluir em relação à probabilidade que calculaste na alínea anterior?"

"Qual é a probabilidade de sair uma bola com número par na segunda extração e ímpar na primeira?" (5/10×5/9)

"Qual é a probabilidade de sair uma bola com número ímpar na primeira extração?" (5/9)

"Qual é o valor da probabilidade da segunda bola ter número par sabendo que a primeira que foi extraída tem número ímpar, se a experiência for com reposição?" (5/10)

Discussão Geral:

"Sabendo que a primeira bola retirada tem um número ímpar, qual será a probabilidade da segunda bola retirada também ter um número ímpar?"

(P=4/9)

“Sabendo que o número da primeira bola retirada é o número 2, qual é a probabilidade da segunda bola retirada ter o número 2? Porquê?”

(P=0)

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser laranja sabendo que o seu número par?”

(P=3/5)

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser branca sabendo que o seu número é par?”

(P=2/5)

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser laranja e ímpar?”

(P=2/5)

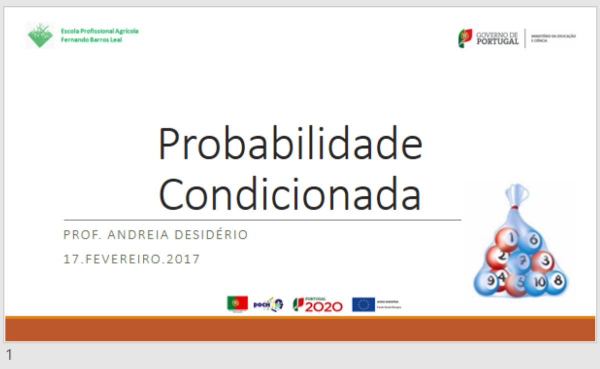
“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser laranja e ímpar?”

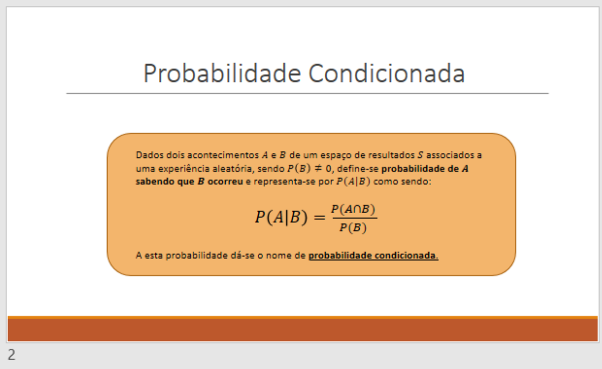
(P=2/5)

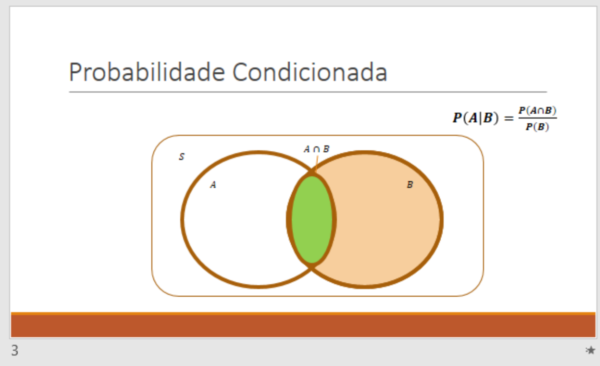
“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ter um número inferior a 11 sabendo que é laranja?”

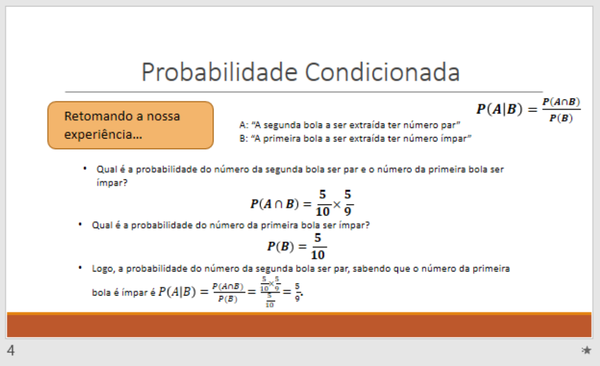
(P=1)

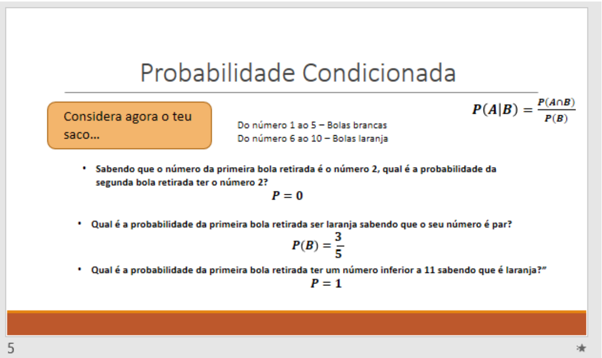
Anexo 2: Diapositivos da aula 1











Anexo 3: Plano de aula 2

Plano de Aula 1 - 20 de fevereiro de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Probabilidade condicionada – revisão da aula anterior. ➢ Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola”.

Objetivos
➢ Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos utilizando a noção e a fórmula de probabilidade condicionada.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos (interseção); probabilidade condicionada.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola", em suporte papel; ➢ Manual; ➢ Excel "Probabilidade Condicionada 2".	➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola", em suporte papel; ➢ Manual.

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola" irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola", em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
    ➢ Pontualidade;
    ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
    ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
    ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
    ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
    ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	**Tempo Previsto (min)**
(1) Início da aula.	10
(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola".	5
(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola".	10
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola".	20
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com uma breve revisão da matéria dada na aula anterior. A professora irá aproveitar este momento para questionar alguns alunos, por ela escolhidos, sobre a matéria dada na aula anterior. Para isso vai escrever a fórmula da probabilidade condicionada no quadro para auxiliar as suas questões.

"O que é a probabilidade condicionada?"

(Após escrever P(A|B), no quadro)
"O que é que significa P(A|B)?"

"A barra na vertical significa o que?

"Porque é que a probabilidade de B não pode ser 0?"

Após estas questões, espera-se que os alunos levantem algumas dúvidas que tenham acerca da aula anterior e da noção de probabilidade condicionada.

(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola"

Nesta fase a professora irá distribuir a tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola", em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo. A professora irá informar que realizarão a tarefa em pequenos grupos de 2 ou 2 alunos e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde alguns alunos escolhidos pela professora, irão apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparadas diferentes resoluções e estratégias.

Os alunos irão ler a primeira alínea da tarefa que irão realizar em grupo turma. De seguida, em grupo turma, irão ser recolhidos os dados necessários para a realização da tarefa.

Posteriormente, os alunos terão um breve momento para ler o restante da tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

Por último ficará definido 10 minutos de trabalho de grupo para a realização da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola"

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções e dificuldades estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(4) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola"

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. A professora irá escolher um aluno e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se o conceito ficou compreendido por todos. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

Por fim, a professora irá sintetizar que, em certas ocasiões, é possível calcular uma probabilidade condicionada apenas através da sua noção e noutras a fórmula facilita o seu cálculo, com a ajuda dos alunos e das suas aprendizagens realizadas durante a tarefa.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(5) Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 2 (Resolução da ficha de trabalho – Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola)

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:____________________________________ Nº______

Nome:____________________________________ Nº______ Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola

1. Os professores de uma turma de 2º ano da escola de Runa querem fazer um estudo para saber a probabilidade de os alunos que vêm para a escola de autocarro chegarem atrasados à primeira aula.

   a. Recolhe os seguintes dados dos alunos da tua turma:

      - Quantos alunos vão para a escola de autocarro;
      - Quantos alunos chegam atrasados;
      - Quantos alunos vão para a escola de autocarro e chegam atrasados;

Resolução:

(Exemplo)

Alunos que vão para a escola de autocarro: 10

Alunos que chegam atrasados: 11

Alunos que vão para a escola de autocarro e chegam atrasados: 5

b. Organiza os dados da alínea anterior numa tabela e ajuda os professores a descobrir o valor da probabilidade pretendida.

Resolução:

(Exemplo)

	Vieram de autocarro	**Não vieram de autocarro**	**Totais**
Chegaram atrasados	5	6	**11**
Não chegaram atrasados	5	2	**7**
Totais	**10**	**8**	**18**

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Organizar a tabela com os dados recolhidos.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Quantos alunos chegam atrasados?" "E quantos vão de autocarro?"
Perceber que o espaço de resultados passa a ser 10 alunos, que são aqueles que vieram de autocarro.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "O que é que eu já sei? (Que o aluno vem de autocarro)" "Quantos são esses alunos?"
Compreender o número de casos favoráveis, ou seja, que desses 10 alunos apenas 5 alunos chegaram atrasados.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Dos alunos que vão de autocarro, quantos chegam atrasados?"

Discussão:

"Nesta situação qual é o espaço de resultados?"

"Qual é o número de casos possíveis? E favoráveis? Porquê?"

"Quantos alunos não chegaram atrasados e vieram de autocarro?"

"Quantos alunos vieram de autocarro?"

"Qual a probabilidade de um aluno não chegar atrasado sabendo que não vem de autocarro?"

"Escolhendo um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de ele não chegar atrasado e não vir de autocarro?"

c. Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, determina P(A|C), sendo A e C os acontecimentos "Vir de autocarro" e "Chegar atrasado", respetivamente.
Na tua resposta deves incluir:

- O significado de P(A|C), no contexto desta situação;
- A apresentação dos casos possíveis que consideraste;
- A apresentação dos casos favoráveis;
- O valor da probabilidade pedida.

Resolução:

- O significado de P(A|C), no contexto desta situação: A probabilidade pedida é a probabilidade de vir de autocarro sabendo que chega atrasado.
- A apresentação dos casos possíveis que consideraste: Sabendo que o aluno chega atrasado, o nosso espaço de resultados passam a ser 11 alunos, aqueles que chegaram atrasados.
- A apresentação dos casos favoráveis: Como dos alunos que chegaram atrasados apenas 5 foram de autocarro então 5 é o número de casos favoráveis.
- O valor da probabilidade pedida: P(A|C)=5/11

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Compreender o significado da probabilidade pedida, no contexto dessa situação.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Qual é o acontecimento A? E o C?" "O que é que significa a barra?"
Perceber que o espaço de resultados passa a ser 11 alunos, que são aqueles que chegaram atrasados.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "O que é que eu já sei? (Que o aluno chega atrasado)" "Quantos são esses alunos?"
Compreender o número de casos favoráveis, ou seja, que desses 11 alunos apenas 5 alunos foram para a escola de autocarro.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Desses alunos, quais são aqueles que vieram de autocarro?" "Então quantos são os nossos casos possíveis? E os favoráveis?"

Discussão:

"Se eu utilizasse a fórmula quais eram as probabilidades que eu precisava?"

"Então qual é a probabilidade de chegarem atrasados e virem de autocarro?"

"Qual é a probabilidade de chegarem atrasados?"

Anexo 4: Plano de aula 3

Plano de Aula 2 - 20 de fevereiro de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?". ➢ Diagrama de Venn e probabilidade Condicionada.

Objetivos
➢ Usar Diagramas de Venn para calcular a probabilidade de alguns acontecimentos envolvendo a noção de probabilidade condicionada.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos (interseção); probabilidade condicionada.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?", em suporte papel; ➢ Manual; ➢ *PowerPoint* "Probabilidade Condicionada 3".	➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?", em suporte papel; ➢ Manual.

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa "Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?" irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?", em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
  ➢ Pontualidade;
  ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
  ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
  ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
  ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
  ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	Tempo Previsto (min)
(1) Início da aula.	10
(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola".	5
(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola".	10
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola".	20
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(6) Início da aula.

A aula terá início com a distribuição de um inquérito sobre o sabor preferido do gelados dos alunos, para utilizar para a resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?”. A professora irá pedir aos alunos, que respondam apenas uma das opções dos inquéritos. De seguida, o resultado dos inquéritos será escrito, pela professora, no quadro.

(7) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?”

Nesta fase a professora irá distribuir a tarefa “Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?”, em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo. A professora irá informar que realizarão a tarefa em pequenos grupos de 2 ou 2 alunos e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde alguns alunos escolhidos pela professora, irão apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparadas diferentes resoluções e estratégias.

Os alunos terão um breve momento para ler a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

Por último ficará definido 15 minutos de trabalho de grupo para a realização da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(8) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?”

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções e dificuldades estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(9) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?”

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. A professora irá escolher um aluno e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam a interpretação de um Diagrama de Venn para o cálculo de uma probabilidade condicionada. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

Por fim, a professora irá sintetizar que na visualização dos Diagramas de Venn, dá para perceber claramente qual é o espaço de resultados que nos interessa na situação em causa, com a ajuda dos alunos e das suas aprendizagens realizadas durante a tarefa.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(10)Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 2 (Resolução da ficha de trabalho – Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?)

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:_________________________________ Nº______

Nome:_________________________________ Nº______ Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?

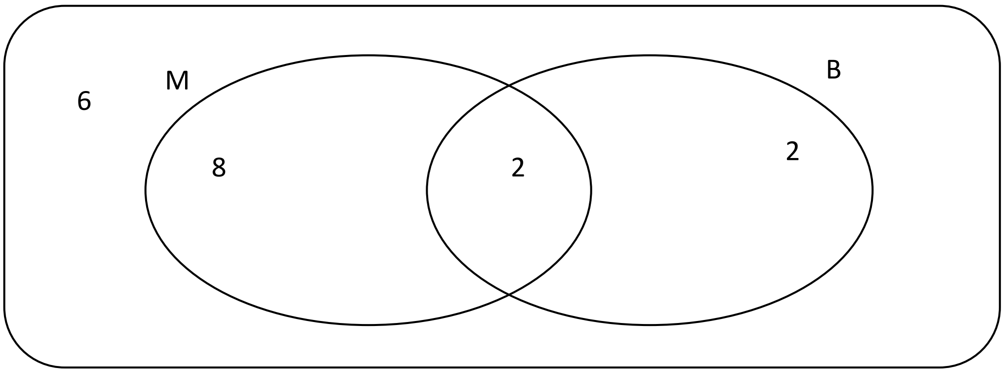
1. A professora de Matemática tem interesse em saber as preferências dos seus alunos no sabor de gelados, para isso fez um inquérito e obteve os seguintes resultados.

Sabor Preferido	Nº de alunos
Morango	8
Baunilha	2
Ambos os sabores	2
Nenhum dos anteriores	6

1.1. Representa os resultados obtidos na tua turma, através de um Diagrama de Venn.

Resolução:

(Dado o exemplo anterior)



Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Compreender que o número de alunos que gostam de ambos os sabores é colocado na zona de interseção dos dois sabores, morango e baunilha.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Quantos alunos gostam de morango?" "Quantos alunos gostam de baunilha?" "Quantos gostam de ambos os sabores, simultaneamente?"

1.2. Tendo em conta o Diagrama que construíste na alínea anterior, determina a probabilidade de:

1.2.1. Gostar de morango;

Resolução:

$$P = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

1.2.2. Gostar de baunilha, sabendo que gosta de morango;

Resolução:

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

1.2.3. Gostar de morango e baunilha;

Resolução:

$$P = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Compreender que o número de pessoas que gostam de morango, são aquelas que apenas gostam de morango e as que gostam de ambos os sabores.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Quantos alunos gostam de morango?" "Quantos gostam de ambos os sabores, simultaneamente?" Se nos referimos aos que gostam de morangos não nos estamos a limitar aos alunos que apenas gostam de morango.
Compreender que a probabilidade de gostar de morango sabendo que gostam de baunilha já altera o espaço de resultados para o número de alunos que gostam de baunilha, pois essa é uma condição que já se conhece.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Quantos alunos gostam de baunilha?" "Desses alunos, quantos gostam de morango?" "Utiliza a fórmula da probabilidade condicionada, para calculares a probabilidade pretendida."

1.3. Se metade dos alunos que preferem apenas morango preferissem apenas baunilha, escolhido um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de gostar de morango sabendo que gosta de baunilha? O que é que alterou no cálculo dessa probabilidade relativamente à questão 1.2.2.?

Resolução:

$$P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

O que alterou no cálculo desta probabilidade foi o número de casos possíveis, pois aumentou o número de alunos que gostam de baunilha. Por isso, a probabilidade diminui relativamente à probabilidade calculada na alínea anterior.

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Compreender que o número de pessoas que gostam de baunilha, altera-se e dessa forma o espaço de resultados da probabilidade pretendida também se altera.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: "Quantos alunos gostam de baunilha?" "Quantos gostam de ambos os sabores, simultaneamente?" "O que é que acontece ao nosso espaço de resultados (número de casos possíveis)?"

1.4. Imagina que 12 alunos gostavam apenas de morango. Escolhi um aluno ao acaso. Sabendo que esse aluno gostava de morango, a probabilidade de gostar também de baunilha é de 1/3. Quantos alunos gostavam de ambos os sabores? Justifica o teu raciocínio.

Resolução:

Número de alunos que gostam de morango: 12

$$P(B|M) = \frac{1}{3}$$

$$P(B|M) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\#\,(B \cap M)}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \#\,(B \cap M) = \frac{1}{3} \times 12 = 4$$

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Utilização da fórmula da probabilidade condicionada.	Os alunos poderão sentir dificuldades na utilização da fórmula da probabilidade condicionada. Nesse sentido a professora pode precisar de referir que neste caso a utilização da fórmula é praticamente indispensável (dados os seus conhecimentos anteriormente desenvolvidos.)

Discussão Geral:

"Qual é a probabilidade de gostar de morango ou baunilha?"

"A probabilidade de gostar de morango, sabendo que gosta de baunilha é a mesma que a probabilidade de gostar de baunilha sabendo que gosta de morango?"

"Qual é a probabilidade de o sabor preferido ser chocolate?"

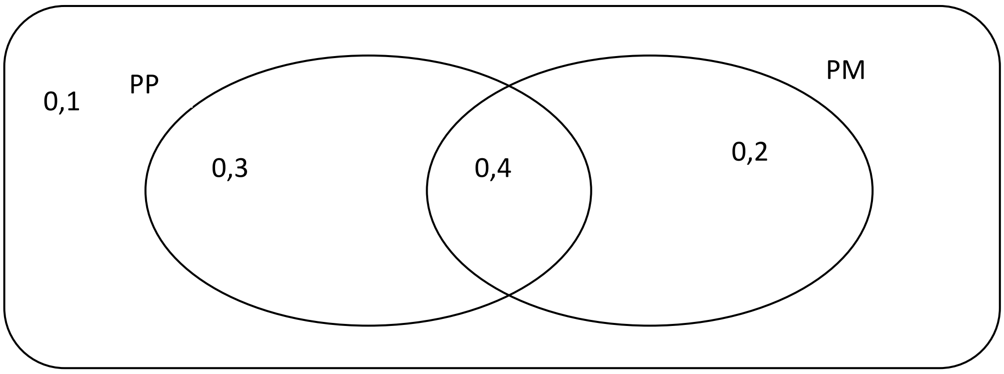
"Escolhendo um aluno ao acaso, sabendo que não gosta de baunilha, qual é a probabilidade de gostar de morango?"

"Escolhendo dois alunos ao acaso da turma, qual é a probabilidade de um gostar apenas de morango e o outro gostar apenas de baunilha?"

2. Um aluno da Escola Profissional Agrícola de Runa tem dois testes no mesmo dia – Português e Matemática. A probabilidade de ter positiva no teste de Português é de 0,7, a probabilidade de ter positiva no teste de Matemática é 0,6 e a probabilidade de ter positiva nos dois é 0,4.

Determine a probabilidade de o aluno:

Resolução:



2.1. Não ter positiva em nenhum teste.

Resolução:

$$P = 0{,}1$$

Dificuldades:

Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Compreender que para calcular a probabilidade de ter positiva apenas a matemática, tem de retirar a probabilidade de ter positiva em ambos os testes. O mesmo acontece para calcular a probabilidade de ter positiva apenas a português. Para além disso poderá ter dificuldade em compreender que a probabilidade de obter negativa em ambos os testes é a subtração de 1 com os restantes valores do Diagrama.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: “Qual é a probabilidade de ter positiva em ambos os testes?” “Qual é a probabilidade de ter positiva apenas a Português?” “Qual é a probabilidade de ter positiva apenas a Matemática?” “Então e de ter negativa em ambos os testes?”

2.2. Ter positiva no teste de Matemática, sabendo que teve negativa no teste de Português.

Resolução:

$$P(PM|NPP) = \frac{P(PM \cap NPP)}{P(NPP)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$$

Dificuldades:

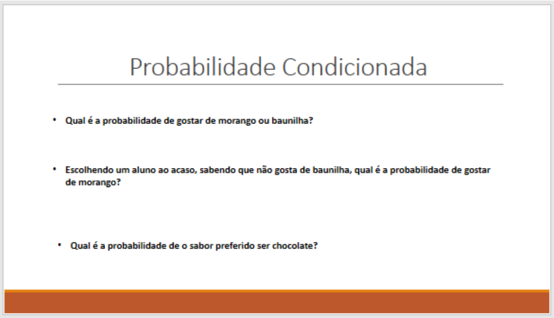
Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
Compreender que ter negativa no teste de português é o exterior da circunferência que é definida por “Ter positiva no teste de Português”, ou seja, 1 – a probabilidade de ter positiva no teste de português.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: “Qual é a probabilidade de ter positiva no teste de português?” “Qual é a probabilidade de ter negativa no teste de português?” “Que percentagem de alunos tem positiva no teste de matemática sabendo que não tem positiva em ambos?"

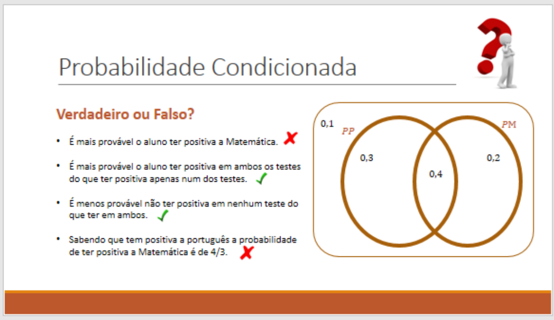
Discussão Geral:

Na discussão desta questão irei, com auxílio do *PowerPoint*, fazer questões de verdadeiro ou falso:

- É mais provável o aluno ter positiva a Matemática.
- É mais provável o aluno ter positiva em ambos os testes do que ter positiva apenas num dos testes.
- É menos provável não ter positiva em nenhum teste do que ter em ambos.
- Sabendo que tem positiva a português a probabilidade de ter positiva a Matemática é de 4/3.

Anexo 5: Diapositivos da aula 3





Anexo 6: Plano de aula 4

Plano de Aula - 3 de março de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões". ➢ Diagrama de Árvore e probabilidade condicionada.

Objetivos
➢ Usar Diagramas de Árvore para calcular a probabilidade de acontecimentos envolvendo a noção de probabilidade condicionada. ➢ Calcular a probabilidade da interseção de dois acontecimentos.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos (interseção); probabilidade condicionada; Diagrama de Árvore.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", em suporte papel; ➢ Manual; ➢ *PowerPoint* "Probabilidade Condicionada 4".	➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", em suporte papel; ➢ Manual.

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões" irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
    ➢ Pontualidade;
    ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
    ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
    ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
    ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
    ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	Tempo Previsto (min)
(1) Início da aula.	10
(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões".	5
(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões".	10
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões".	20
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com uma breve revisão acerca da probabilidade condicionada, tema que tem sido abordado em aulas anteriores. Desta forma, a professora irá pedir a um aluno que formule uma questão sobre probabilidade condicionada, pondo no *PowerPoint* “Probabilidade Condicionada 4”, um breve exemplo de experiência aleatória. Sendo que um outro aluno, irá responder à questão do colega. De seguida, a professora irá pedir a um aluno a noção de probabilidade condicionada e a sua fórmula.

“ O que é uma probabilidade condicionada? Qual é a sua fórmula.”

De seguida, através do exemplo do *PowerPoint* a professora irá, em grupo turma, definir a probabilidade da interseção de dois acontecimentos através da definição de probabilidade condicionada.
Posteriormente, os alunos terão um breve momento para copiar para o caderno as fórmulas da probabilidade condicionada e da interseção de acontecimentos.
Nesse mesmo *PowerPoint*, os alunos irão relembrar um Diagrama de Árvore geral, que utilize a probabilidade condicionada, de forma a utilizarem esta ferramenta para a resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”.

(2) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”

Nesta fase a professora irá distribuir a tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”, em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo. A professora irá informar que realizarão a tarefa em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde alguns alunos escolhidos pela professora, irão apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparadas diferentes resoluções e estratégias.
Os alunos terão um breve momento para ler a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.
Por último ficará definido 10 minutos de trabalho de grupo para a realização da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(1) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.
Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.
As possíveis resoluções estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

Questão	Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
1. 1.1.	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que o Diagrama de Árvore já foi explorado anteriormente.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como:

	No entanto os alunos poderão ter dificuldades no cálculo das probabilidades.	"Num lançamento de um dado equilibrado qual é a probabilidade de sair face com um número par? Então essa é a probabilidade de selecionar qual das caixas?" "E sair uma face com um número ímpar? Essa é a probabilidade de selecionar quais das caixas?" "Imagina que escolhemos a caixa vermelha, qual é a probabilidade de retirar um bombom de chocolate? Quantos bombons de chocolate há nessa caixa? Quantos bombons tem a caixa? Então qual é a probabilidade de retirarmos um bombom de leite?" "E se escolhêssemos a caixa azul, qual é a probabilidade de retirar um bombom de chocolate? Quantos bombons de chocolate há nessa caixa? Quantos bombons tem a caixa? Então qual é a probabilidade de retirarmos um bombom de leite?" Caso os alunos sintam dificuldades nesta questão, a professora deve remetê-los para o Diagrama de Árvore que construíram na alínea anterior.
1.2. a)	Na alínea a) desta questão, dada a sua facilidade e clareza, penso que não haverá dúvidas no cálculo dessa probabilidade, pois pode-se retirar através da interpretação do Diagrama de Árvore construído na alínea anterior.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Em que casos podemos retirar um bombom de chocolate?" "Qual é a probabilidade de retirar um bombom de chocolate da caixa vermelha?" "E da caixa azul?" "Assim, como é que calculamos a probabilidade de retirar um bombom de chocolate, sem restrição da caixa a que o retiramos?"
b)	Na alínea b) poderão surgir dúvidas caso os alunos não compreendam que a probabilidade de o bombom extraído ser de chocolate, é a soma de retirar um bombom de chocolate da caixa vermelha com retirar um bombom de chocolate da caixa azul.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Qual é a probabilidade pedida? Como é que se traduz essa probabilidade numa expressão?"

c)		"Qual é a fórmula da probabilidade condicionada?" De seguida, a professora deve remeter os alunos a calcular a probabilidade da interseção dos acontecimentos separadamente, para facilitar os cálculos e as frações que irão colocar na fórmula da probabilidade condicionada.
1.3.	Os alunos poderão sentir dificuldades no cálculo desta probabilidade devido a invertermos o eixo temporal, isto é, sabendo que o bombom é de chocolate sabermos a probabilidade de ter sido extraído da caixa azul.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Qual é a diferença entre as probabilidades?" "Como é que se lê P(Ca|C) e P(C|Ca)?" "Aplicando a fórmula da probabilidade condicionada, o que é que difere?"
2. 2.1.	Nesta questão os alunos poderão sentir dificuldades na interpretação do enunciado. Desta fórmula pode ser confuso diferenciar as probabilidades pedidas, tendo dificuldades em diferenciar ambas as probabilidades na fórmula. (Erro da falácia condicional transposta)	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Quando multiplicamos dois números positivos, o número obtido vai ser positivo ou negativo?" "E se forem dois números negativos?" "Assim o produto de número com o mesmo sinal dá… . E com sinais diferentes dá um número … . " Com o mesmo tipo de raciocínio é previsível que os alunos não sintam dificuldades na questão seguinte (2.2.).
2.2.	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que o Diagrama de Árvore já foi explorado anteriormente. No entanto os alunos poderão ter dificuldades, por terem dificuldades em perceber quando é que o produto de dois números dá um número negativo ou positivo.	Nesta questão a professora deve levar o aluno a utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Para isso é necessário que o aluno já tenha compreendido os casos em que o produto dos três cartões dá um número positivo.

2.3.	De uma forma geral, esta questão não deverá levantar muitas dificuldades, caso os alunos tenham construído Diagramas de Árvore nas questões anteriores.	

(2) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 4"

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. A professora irá escolher um aluno e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam a interpretação de um Diagrama de Árvore para o cálculo de uma probabilidade condicionada e da probabilidade da interseção de acontecimentos. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

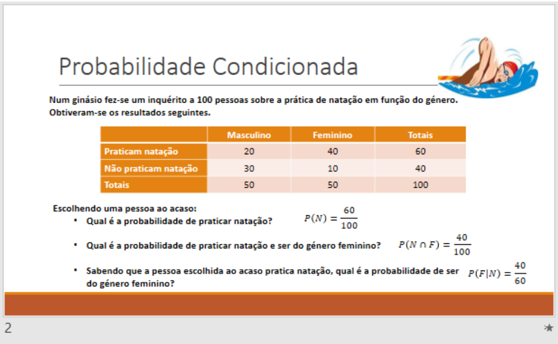
Nesta fase, a professora irá utilizar o *PowerPoint* "Probabilidade Condicionada 4" para sistematizar as aprendizagens feitas ao longo da aula.

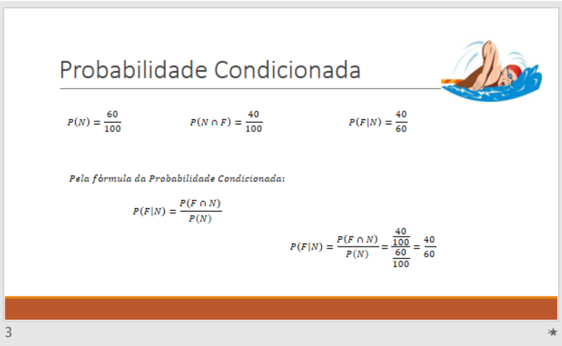
As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

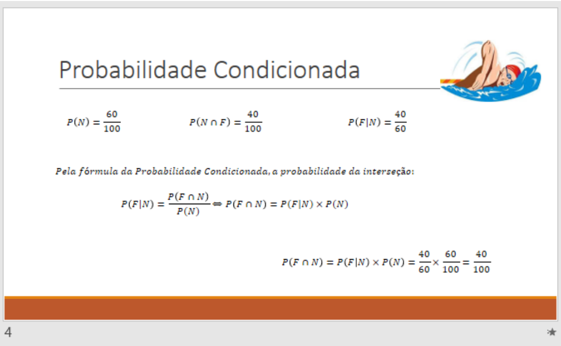
(3) Encerramento da Aula

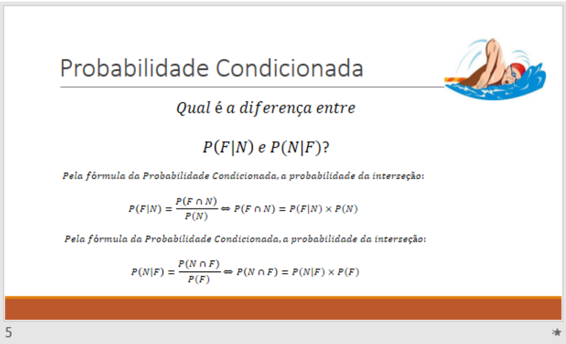
Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

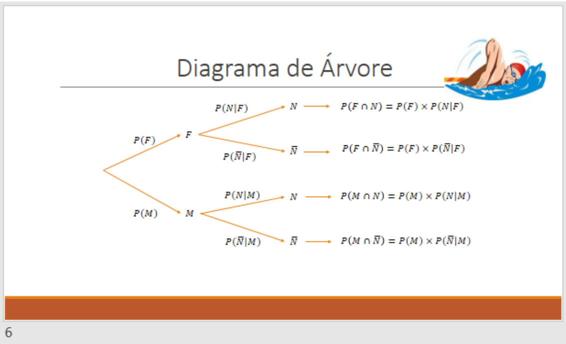
Anexo 7: Diapositivos da aula 4

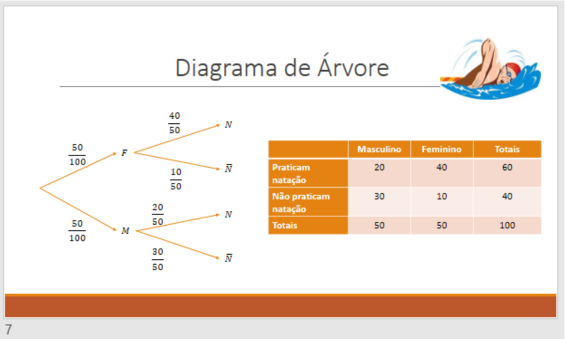












Anexo 8: Plano de aula 5

Plano de Aula 1 - 6 de março de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Conclusão da resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”. ➢ Diagrama de Árvore e probabilidade condicionada.

Objetivos
➢ Usar Diagramas de Árvore para calcular a probabilidade de acontecimentos envolvendo a noção de probabilidade condicionada. ➢ Calcular a probabilidade da interseção de dois acontecimentos.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos (interseção); probabilidade condicionada; Diagrama de Árvore.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”, em suporte papel; ➢ Manual;	➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”, em suporte papel; ➢ Manual; ➢ Sacos com papéis numerados.

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões” (exercício 2) irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”, em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
    ➢ Pontualidade;
    ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
    ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
    ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
    ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
    ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	**Tempo Previsto (min)**
(1) Início da aula.	5
(2) Discussão e sistematização da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”, exercício 1.	15
(3) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”, exercício 2.	10
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões”, exercício 2.	15
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com a distribuição da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", a cada um dos grupos da aula anterior. De seguida, a professora irá indicar aos alunos, que irá ser feita a discussão e sistematização dos resultados do exercício 1, da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", que realizaram na aula anterior.

(2) Discussão e Sistematização da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", exercício 1.

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. Os alunos escolhidos pela professora irão ao quadro apresentar os seus resultados sendo que lhes poderá ser solicitado algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam a interpretação de um Diagrama de Árvore, utilizando a probabilidade condicionada, para o cálculo da probabilidade da interseção de acontecimentos. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

Neste momento, o papel da professora será o de mediadora de aprendizagem e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir garantindo que toda a turma realiza aprendizagens significativas.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", exercício 2.

Antes de iniciarmos este momento, a professora irá entregar aos alunos, um saco com papéis, para eles realizarem as experiências necessárias de forma a compreenderem a experiência que o exercício descreve. De seguida, ficará definido 10 minutos de trabalho autónomo.

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

Questão	Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora

2. 2.1. 2.2.	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que o Diagrama de Árvore já foi explorado anteriormente. No entanto os alunos poderão ter dificuldades, por terem dificuldades em perceber quando é que o produto de dois números dá um número negativo ou positivo.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Tira dois papéis do saco e verifica se os números que saíram são positivos e/ou negativos. E o produto?" "Quando multiplicamos dois números positivos, o número obtido vai ser positivo ou negativo?" "E se forem dois números negativos?" "Assim o produto de número com o mesmo sinal dá… . E com sinais diferentes dá um número … . " "Então qual é a probabilidade de tirar um número positivo? E negativo?" Com o mesmo tipo de raciocínio é previsível que os alunos não sintam dificuldades na questão seguinte (2.2.). Caso existam dúvidas, de forma a facilitar a compreensão desta nova experiência, a professora pode solicitar aos alunos que realizem a experiência de retirar 3 cartões do saco e verificar se o produto desses valores, dá um número positivo ou negativo.
2.3.	De uma forma geral, esta questão não deverá levantar muitas dificuldades, caso os alunos tenham construído Diagramas de Árvore nas questões anteriores.	Nesta questão a professora deve levar o aluno a utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Para isso é necessário que o aluno já tenha compreendido os casos em que o produto dos três cartões dá um número positivo.

(4) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões", exercício 2.

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. Os alunos escolhidos pela professora irão ao quadro apresentar os seus resultados sendo que lhes poderá ser solicitado algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam a noção de probabilidade condicionada e sabem calcular a probabilidade de interseção de dois acontecimentos, através da fórmula da probabilidade condicionada. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

Neste momento, o papel da professora será o de mediadora de aprendizagem e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir garantindo que toda a turma realiza aprendizagens significativas.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(5) Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 9: Plano de aula 6

Plano de Aula 2 - 6 de março de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado". ➢ Probabilidade condicionada. Acontecimentos independentes.

Objetivos
➢ Noção de acontecimentos independentes; ➢ Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos (interseção); probabilidade condicionada.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado”, em suporte papel; ➢ Manual; ➢ *PowerPoint* “Probabilidade Condicionada 5”; ➢ Excel “Probabilidade Condicionada 5”.	➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado”, em suporte papel; ➢ Manual; ➢ Dado; ➢ Moeda de 1€.

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa “Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado” irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado”, em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
  ➢ Pontualidade;
  ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
  ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
  ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
  ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
  ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	**Tempo Previsto (min)**
(1) Início da aula.	10
(2) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado”.	5
(3) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado”.	15
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado”.	15
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com a professora a questionar os alunos:

"O que é que para vocês são acontecimentos independentes?"

"Conseguem-me dar exemplos sobre acontecimentos independentes?"

"Então e exemplos de acontecimentos que não sejam independentes?"

"Na nossa experiência, do saco com as bolas, se retirarmos a primeira e retirarmos sem reposição a segunda bola, é um acontecimento independente ou não? E se voltarmos a repor a segunda bola?"

Após algum debate dos alunos, perante estas questões, a professora irá distribuir os materiais que os alunos irão necessitar de utilizar para a resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 5".

(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado"

Nesta fase a professora irá distribuir a tarefa "Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado", em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo. A professora irá informar que realizarão a tarefa em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde alguns alunos escolhidos pela professora, irão apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparadas diferentes resoluções e estratégias.

Os alunos terão um breve momento para ler a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

Por último ficará definido 15 minutos de trabalho de grupo para a realização da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado"

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

Questão	Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
1. 1.1.	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que o enunciado é bastante claro.	No entanto, caso o grupo esteja com dificuldades na experiência que pretende a professora deve fazer uma ou duas experiências com o grupo. Caso hajam dúvidas generalizadas, a professora pode

		necessitar de interromper o trabalho autónomo para esclarecer a experiência que a tarefa propõe.
1.2. a) b)	Os alunos poderão apresentar dificuldades em calcular a probabilidade utilizando a regra de Laplace, no entanto, de uma forma geral, esta questão não deverá implicar muitas dificuldades.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: “Como é que se calcula uma probabilidade?” “O que diz a regra de Laplace?” “Na tua experiência, quantos são os teus casos favoráveis para calcular o valor dessa probabilidade? “E relativamente aos casos possíveis quantos são? “ “Há 9 casos favoráveis (por exemplo), em quantas experiências? Então quantos são os nossos casos possíveis?”
c)	Ao longo das aulas anteriores, os alunos têm demonstrado algumas dificuldades na compreensão da noção de probabilidade condicionada. No entanto, pela forma como os dados estão organizados numa tabela espera-se que os alunos não sintam grandes dificuldades. Ainda assim podem sentir dificuldades em perceber que a interseção de acontecimentos dá-se quando ambos os acontecimentos acontecem em simultâneo.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: “O que é a interseção de dois acontecimentos?” “Em quantas experiências acontece que sai número par e em simultânea face nacional? “Então qual é o número de casos favoráveis? Em quantos casos? (casos possíveis)
d)	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que o que se pede é apenas o produto de duas probabilidades já calculadas anteriormente. No entanto, alguns alunos poderão apresentar dificuldades no produto de frações.	Caso existam grupos com dificuldades em calcular o produto de frações, a professora deve relembrar os alunos sobre o cálculo do produto das frações. Podendo aproveitar o momento, para relembrar todas as outras operações com frações (soma, subtração ou quociente).

1.3.	Casos os resultados tenham dado muito diferentes do que se espera, os alunos poderão não conseguir perceber que o valor das probabilidades é muito semelhante. Para além disto, podem não perceber que o produto das probabilidades é igual à probabilidade da interseção dos dois acontecimentos se e só se os acontecimentos forem independentes.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Já calcularam o valor dessa probabilidade na calculadora? Vejam os seus valores e arredondem às centésimas" "O que é que acontece?" "Porque é que os valores dessas probabilidades são iguais ou muito semelhantes?" "Atirar a moeda ao ar e o lançamento do dado são acontecimentos independentes ou dependentes?"

(4) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 5: O lançamento da moeda e do dado"

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. A professora irá escolher um aluno e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam o que são acontecimentos independentes e como é que se calcula a probabilidade de interseção de acontecimentos independentes. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

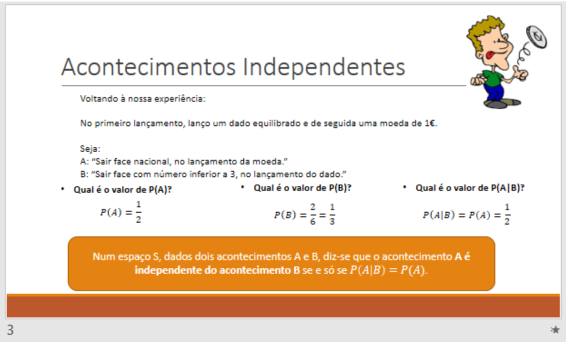
Nesta fase, a professora irá utilizar o *PowerPoint* "Probabilidade Condicionada 5" para sistematizar as aprendizagens feitas ao longo da aula.

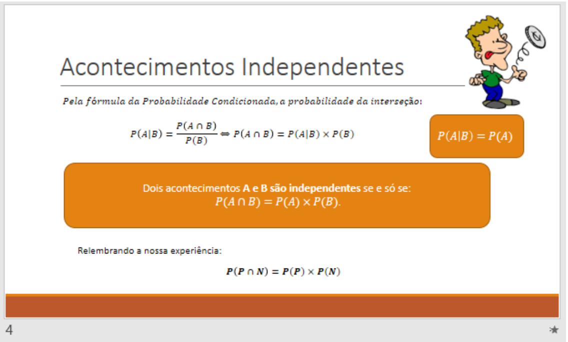
As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(5) Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 10: Diapositivos da aula 6





Anexo 11: Plano de aula 7

Plano de Aula - 10 de março de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras". ➢ Probabilidade condicionada. Acontecimentos independentes. Probabilidade de interseção.

Objetivos
➢ Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada e a probabilidade de interseção. ➢ Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos; probabilidade condicionada; probabilidade da interseção; acontecimentos independentes.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras", em suporte papel; ➢ Manual; ➢ *PowerPoint* "Probabilidade Condicionada 7";	➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras", em suporte papel; ➢ Manual;

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras" irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras", em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
    ➢ Pontualidade;
    ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
    ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
    ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
    ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
    ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	**Tempo Previsto (min)**
(1) Início da aula.	5
(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras".	5
(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras".	15
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras".	20
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com a professora a distribuir a tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras", em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo.

(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras"

Nesta fase, a professora irá informar que realizarão a tarefa em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde alguns alunos escolhidos pela professora, irão apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparadas diferentes resoluções e estratégias.

Os alunos terão um breve momento para ler a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

Por último ficará definido 15 minutos de trabalho de grupo para a realização da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras"

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

Questão	Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
1. 1.1. a) b)	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que são pedidas probabilidades de apenas um acontecimento e sendo que apenas terão de aplicar a Regra de Laplace.	No entanto, caso o grupo esteja com dificuldades a professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Como é que se calcula uma probabilidade?" "O que diz a Regra de Laplace?" "Quantos são os casos favoráveis?" "Em quantos, ou seja, qual é o número de casos possíveis?"

c)	Os alunos poderão apresentar dificuldades na compreensão da noção da probabilidade de interseção. Em aulas anteriores os alunos têm demonstrado dificuldades em distinguir a interseção de acontecimentos e a união de acontecimentos.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "O que é que nos é pedido?" "Quando nos é pedida uma probabilidade de ocorrer um acontecimento E outro acontecimento, estamos perante a interseção ou a união de acontecimentos?" "O que é a interseção de dois acontecimentos?" "Quantas são as pessoas que não fumam e em simultâneo não são do género masculino? Ou seja, quantas são mulheres e não fumam? "Então qual é o número de casos favoráveis? Em quantos casos? (casos possíveis)
d)	Ao longo das aulas anteriores, os alunos têm demonstrado algumas dificuldades na compreensão da noção de probabilidade condicionada. No entanto, pela forma como os dados estão organizados numa tabela espera-se que os alunos não sintam grandes dificuldades. Ainda assim poderão sentir dificuldades em compreender o número de casos possíveis, pois o espaço de resultados no cálculo de uma probabilidade condicionada é alterado.	No entanto, caso o grupo esteja com dificuldades a professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Qual é o nosso espaço de resultados?" "Ou seja, dos homens quantos é que são fumadores? Em quantos?"
2. a)	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que são pedidas probabilidades de apenas um acontecimento e sendo que apenas terão de aplicar a Regra de Laplace.	Ainda assim, a professora pode incentivar os alunos a confirmarem o seu resultado através da fórmula da probabilidade condicionada. Desta forma, os alunos estariam não só a desenvolver o seu raciocínio matemático como também estariam a exercitar a manipulação algébrica da fórmula.
b)	Relativamente à equipa B, que efetua a experiência com reposição da bola retirada na primeira extração, de uma forma geral não deverá suscitar dúvidas nos alunos, pois estes	No entanto, caso o grupo esteja com dificuldades a professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como:

	facilmente compreendem que o espaço amostral não se altera com a primeira extração. Relativamente à equipa A, que efetua a experiência, sem reposição da bola retirada na primeira extração, poderá levantar dúvidas nos alunos: -Não compreensão que o espaço de resultados é alterado após a primeira extração; - Cálculo da probabilidade de interseção através da probabilidade condicionada; - Compreender que a probabilidade de retirar bola verde na segunda extração é a soma de sair bola verde na primeira extração e bola verde na segunda extração com a probabilidade de sair bola amarela na primeira extração e verde na segunda.	"Como é que se calcula uma probabilidade?" "O que diz a Regra de Laplace?" "Quantas bolas tem a urna?" "Dessas bolas, quantas são verdes?" A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: (Equipa B) "Após se extrair a primeira bola da urna e de voltar a colocá-la novamente na urna, com quantas bolas a urna vai ficar?" "Quantas dessas são verdes?" "E se a primeira for amarela?" "E se a primeira bola for verde?" "A cor da segunda bola retirada, vai depender da primeira bola retirada?" "Como é que se designam esses acontecimentos?" (Equipa A) "Após a primeira extração, com quantas bola a urna vai ficar?" "Quantas dessas são verdes?" "E se a primeira for amarela?" "E se a primeira bola for verde?" "A cor da segunda bola retirada, vai depender da primeira bola retirada?" "Como é que se designam esses acontecimentos?" "Sair bola verde na segunda extração, acontece se retirarmos bola amarela na primeira extração ou bola verde, correto? Se é "ou", como é que calculamos a probabilidade total?"	
c)	Relativamente à equipa A, os alunos poderão ter dificuldades a calcular a interseção através da probabilidade condicionada. Relativamente à equipa B, os alunos poderão ter dificuldades a calcular a	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: (Equipa A)	

	interseção de dois acontecimentos, sendo que estes são independentes.	A professora pode incentivar os alunos a representar os dados através de um Diagrama de Árvore. Assim, torna-se mais visível que a probabilidade da interseção dos dois acontecimentos provêm do produto de $P(V_1)$ com $P(V_2 \vert V_1)$. “Qual é probabilidade de a segunda bola extraída ser verde sabendo que a primeira bola extraída foi azul?” “Qual é a probabilidade de extrair bola verde na primeira extração?” “Então qual é a probabilidade de interseção dos dois acontecimentos? Utiliza a fórmula da probabilidade condicionada.” (Equipa B) “O que é que difere da experiência da equipa A para a equipa B?” “Quando fazemos duas extrações consecutivas, com reposição, estamos perante acontecimentos independentes ou dependentes?” “Como é que se calcula a probabilidade da interseção de dois acontecimentos, sendo que estes acontecimentos são independentes?”

(4) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras”

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. A professora irá escolher um aluno e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam o que são acontecimentos independentes e como é que se calcula a probabilidade de interseção de acontecimentos independentes, bem como o cálculo da probabilidade de interseção através da fórmula da probabilidade condicionada. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

Nesta fase, a professora irá utilizar o *PowerPoint* “Probabilidade Condicionada 6” para sistematizar as aprendizagens feitas ao longo da aula.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(5) Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 12: Plano de aula 8

Plano de Aula 1 - 13 de março de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas".

Objetivos
➢ Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada e a probabilidade de interseção. ➢ Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos; probabilidade condicionada; probabilidade da interseção; acontecimentos independentes.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas", em suporte papel; ➢ Manual;	➢ Tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas", em suporte papel; ➢ Manual;

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas" irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas", em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
    ➢ Pontualidade;
    ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
    ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
    ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
    ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
    ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	Tempo Previsto (min)
(1) Início da aula.	5
(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas".	5
(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas".	15
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas".	20
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com a professora a distribuir a tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas", em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo.

(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas"

Nesta fase, a professora irá informar que realizarão os exercícios 1 e 2 da tarefa em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde alguns alunos escolhidos pela professora, irão apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparadas diferentes resoluções e estratégias.

Os alunos terão um breve momento para ler essa parte da tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

Por último ficará definido 15 minutos de trabalho de grupo para a realização dos exercícios 1 e 2 da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas"

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

Questão	Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
1. 1.1.	Os alunos poderão sentir dificuldades em calcular a interseção dos dois acontecimentos utilizando a sua união. Dessa forma, poderão sentir dificuldades em construir o Diagrama de Venn.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Qual é a probabilidade de o aluno saber falar inglês ou francês?" "Qual é a fórmula da probabilidade da união de dois acontecimentos?" "Qual é a probabilidade de um aluno saber ambas as línguas?" Caso o aluno não se recorde da fórmula da probabilidade da união de acontecimentos a professora deve aproveitar o momento para rever esse conceito. Para além disso, deve

		incentivar o aluno a procurar essa fórmula ou, caso o grupo esteja a perder demasiado tempo nessa pesquisa, deve relembrar os alunos dessa fórmula.
	Os alunos poderão também sentir dificuldades em calcular o número de alunos que falavam inglês mas não francês.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: “Quantos alunos estão em estudo?” “Desses alunos, qual é a percentagem de alunos que falavam inglês mas não francês?” Após estas questões e caso os alunos mantenham esta dificuldade, a professora deve incentivar os alunos a fazer uma regra de três simples para calcular o número de alunos que falavam inglês mas não francês. Após este cálculo a professora deve relembrar que quando queremos saber uma percentagem do número total, basta multiplicar pela dízima correspondente a essa mesma percentagem.
1.2. a) b)	Ao longo das aulas anteriores, os alunos têm demonstrado algumas dificuldades na compreensão da noção de probabilidade condicionada. No entanto, pela forma como os dados estão organizados num Diagrama de Venn espera-se que os alunos não sintam grandes dificuldades. Ainda assim poderão sentir dificuldades em compreender o número de casos possíveis, pois o espaço de resultados no cálculo de uma probabilidade condicionada é alterado.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: “Qual é o nosso espaço de resultados?” “O que é que eu já sei sobre a pessoa escolhida?” “Então das pessoas que sabem falar inglês quantas é que sabem também falar francês?” “Das pessoas que sabem falar francês, quantas delas sabem falar inglês?” Ainda assim, a professora pode incentivar os alunos a confirmarem o seu resultado através da fórmula da probabilidade condicionada. Desta forma, os alunos estariam não só a desenvolver o seu raciocínio matemático como também estariam a exercitar a manipulação algébrica da fórmula. Para além disso, acaba por ser um momento que os alunos poderão tirar partindo da interpretação do Diagrama de Venn.

c)	De uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que são pedidas probabilidades de apenas um acontecimento.	Caso os alunos estejam com dificuldades, a professora deve apenas reforçar que o que se pede é a probabilidade de um jovem falar apenas francês, focando a palavra apenas.
2.	Os alunos poderão apresentar dificuldades no cálculo da probabilidade pedida, pois a condição que sabemos é o sabor do rebuçado e não de que saco foi escolhido. (Erro da *falácia da inversão do eixo temporal*).	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "O que é que já conhecemos sobre a nossa extração?" "O que é que pretendo calcular?" "Como é que se escreve a probabilidade pedida?" "Qual é a fórmula da probabilidade condicionada?" Desta forma, a professora deve incentivar o aluno a utilizar a fórmula da probabilidade condicionada para calcular a probabilidade pedida. A professora deve aproveitar esta situação para realçar a necessidade da fórmula da probabilidade condicionada, pois quando se inverte o eixo temporal, apenas podemos calcular a probabilidade condicionada através da sua fórmula.
	Para além disto, os alunos poderão sentir dificuldades em calcular a probabilidade de sair um rebuçado de morango, não reconhecendo que a probabilidade de sair um rebuçado de morango é a soma da probabilidade de sair um rebuçado de morango do saco azul com a probabilidade de sair um rebuçado de morango do saco branco.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Qual é a probabilidade de sair um rebuçado de morango do saco azul?" "E do saco branco?" "Então qual é a probabilidade de retirar um rebuçado de morango?" "Posso retirar um rebuçado de morango do saco azul ou do saco branco, correto? Se é "ou", como é que se calcula a probabilidade de retirar um rebuçado de morango?"

(4) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 7: Problemas"

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. A professora irá escolher um aluno e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam o que são acontecimentos independentes e como é que se calcula a probabilidade de interseção de acontecimentos independentes, bem como o cálculo da probabilidade de interseção através da fórmula da probabilidade condicionada. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(5) Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 13: Plano de aula 9

Plano de Aula 2 - 13 de março de 2017

Matemática

Domínio: Probabilidade (Módulo A7)

Tópico: Probabilidade Condicionada

Sumário
➢ Conclusão da resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 8: Problemas".

Objetivos
➢ Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada e a probabilidade de interseção. ➢ Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

Conhecimentos Prévios
➢ Noções de: Probabilidade; experiência aleatória; lei de Laplace; propriedades da probabilidade; operações com acontecimentos; probabilidade condicionada; probabilidade da interseção; acontecimentos independentes.

Capacidades Transversais
➢ Raciocínio Matemático. ➢ Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas. ➢ Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade. ➢ Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados. ➢ Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa.

RECURSOS	
Professor	**Aluno**
➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 8: Problemas”, em suporte papel; ➢ Manual;	➢ Tarefa “Probabilidade Condicionada 8: Problemas”, em suporte papel; ➢ Manual;

Metodologia de Trabalho
➢ A tarefa “Probabilidade Condicionada 8: Problemas” irá ser realizada pelos alunos em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos, consoante o número de alunos na aula. ➢ Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.

Avaliação

➢ Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 8: Problemas”, em formato papel;
➢ A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
    ➢ Pontualidade;
    ➢ Interesse e participação demonstrados durante a aula;
    ➢ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
    ➢ Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
    ➢ Uso de terminologia e simbologia adequada;
    ➢ Comportamento na sala de aula;

Momentos da Aula	**Tempo Previsto (min)**
(1) Início da aula.	5
(2) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 8: Problemas”.	5
(3) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 8: Problemas”.	15
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 8: Problemas”.	20
(5) Encerramento da Aula.	5

Desenvolvimento da Aula

(1) Início da aula.

A aula terá início com a professora a informar que o intuito da aula é concluir a resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 8: Problemas", que teve início na aula anterior.

(2) Apresentação da tarefa "Probabilidade Condicionada 8: Problemas"

Nesta fase, a professora irá informar que realizarão os exercícios 3 e 4 da tarefa em pequenos grupos de 2 ou 3 alunos e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde alguns alunos escolhidos pela professora, irão apresentar as resoluções do seu grupo e as respetivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparadas diferentes resoluções e estratégias.

Os alunos terão um breve momento para ler essa parte da tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

Por último ficará definido 15 minutos de trabalho de grupo para a realização dos exercícios 3 e 4 da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

(3) Resolução da tarefa "Probabilidade Condicionada 8: Problemas"

Ao longo deste momento, a professora circulará pela sala, de modo a apoiar os alunos com eventuais dificuldades, verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa e selecionar o par que apresentará a sua resolução e as suas justificações. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

Questão	Dificuldade do Aluno	Atividade da Professora
3. a) b) c) d)	Ao longo das aulas anteriores, os alunos têm demonstrado algumas dificuldades na compreensão da noção de probabilidade condicionada. No entanto, pela forma como os dados estão organizados numa tabela espera-se que os alunos não sintam grandes dificuldades. Ainda assim poderão sentir dificuldades em compreender o número de casos possíveis, pois o espaço de resultados no cálculo de uma probabilidade condicionada é alterado.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Qual é o nosso espaço de resultados?" "O que é que eu já sei sobre a pessoa escolhida?" "Então das pessoas daltónicas quantas são do sexo masculino?" "Das pessoas do sexo masculino, quantas são daltónicas?" "Das pessoas daltónicas, quantas são do sexo feminino?"

		"Das pessoas do sexo feminino, quantas são daltónicas?" Ainda assim, a professora pode incentivar os alunos a confirmarem o seu resultado através da fórmula da probabilidade condicionada. Desta forma, os alunos estariam não só a desenvolver o seu raciocínio matemático como também estariam a exercitar a manipulação algébrica da fórmula. Para além disto, a professora deve aproveitar o momento para relembrar os alunos da diferença entre P(D|F) e P(F|D), por exemplo, através da interpretação dos valores obtidos.
e)	Os alunos poderão sentir dificuldades em calcular a probabilidade de interseção, devido a confundir essa probabilidade com uma probabilidade condicionada.	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "Quantas são as pessoas do sexo feminino que não são daltónicas, ou seja, que são normais?" "Quantas pessoas são em simultâneo normais, ou seja, não daltónicas e do sexo feminino?" "Em quantas pessoas?" "Qual é o número de casos favoráveis?" "E de casos possíveis?"
4.	Os alunos poderão sentir dificuldades em: - Perceber que para os acontecimentos serem independentes $\mathbf{P(H \cap D) = P(H) \times P(D)}$; - Calcular a probabilidade de "Ser homem"; - Calcular a probabilidade de "Votar na lista D"	A professora deve questionar os alunos levando-os a ultrapassar as suas dificuldades. Colocando questões como: "O que é que acontece se os acontecimentos forem independentes?" "Como é que se calcula a probabilidade de interseção de acontecimentos independentes?" "Quantas pessoas são do género masculino?" "Quantas pessoas votaram?" "Quantas pessoas votaram na lista D? Em quantas?"

		Caso os alunos continuem com dificuldades a professora deve indicar que para analisarem se os acontecimentos são independentes têm de calcular o produto das probabilidades de cada um dos acontecimentos e comparar com a probabilidade de interseção dos acontecimentos. Deve ainda relembrar, caso os alunos não o consigam concluir autonomamente, que se os resultados derem iguais então os acontecimentos são independentes. Caso os resultados sejam diferentes, os acontecimentos são independentes. A professora deve ainda aproveitar este momento, para rever a noção de acontecimentos independentes.

(4) Discussão e Sistematização dos resultados da tarefa "Probabilidade Condicionada 8: Problemas"

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e justificações. A professora irá escolher um aluno e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se os alunos compreenderam o que são acontecimentos independentes e como é que se calcula a probabilidade de interseção de acontecimentos independentes, bem como o cálculo da probabilidade de interseção através da fórmula da probabilidade condicionada. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

As possíveis questões para o momento de discussão estão previstas na tarefa que se segue em anexo.

(5) Encerramento da Aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

Anexo 14: Tarefa 1

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:_________________________________ Nº_____

Nome:_________________________________ Nº_____ Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas

1. Para realizar uma experiência recebeste um saco com dez bolas, numeradas de 1 a 10.

Do número 1 ao 5 as bolas são brancas e do número 6 ao 10 as bolas são laranja.

a) Diz qual é a probabilidade do número da segunda bola retirada ser par sabendo que o número da primeira bola retirada não é par e explica a tua resposta.

b) Tira uma bola com número ímpar do saco. De seguida executa a experiência de retirar a segunda bola do saco aleatoriamente, com o teu grupo, 20 vezes. Regista os resultados que obtiveste e tira uma conclusão desses resultados.

Anexo 15: Tarefa 2

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal		
	Matemática	
2016/2017		
Nome:______________________________	Nº______	
Nome:______________________________	Nº______	Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 2: Uma viagem até à Escola

1. Os professores de uma turma de 2º ano da escola de Runa querem fazer um estudo para saber a probabilidade de os alunos que vêm para a escola de autocarro chegarem atrasados à primeira aula.

   a. Recolhe os seguintes dados dos alunos da tua turma:

      - Quantos alunos vão para a escola de autocarro;
      - Quantos alunos chegam atrasados;
      - Quantos alunos vão para a escola de autocarro e chegam atrasados;

   b. Organiza os dados da alínea anterior numa tabela e ajuda os professores a descobrir o valor da probabilidade pretendida.

   c. Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, determina P(A|C), sendo A e C os acontecimentos "Vir de autocarro" e "Chegar atrasado", respetivamente.
   Na tua resposta deves incluir:

      - O significado de P(A|C), no contexto desta situação;
      - A apresentação dos casos possíveis que consideraste;
      - A apresentação dos casos favoráveis;
      - O valor da probabilidade pedida.

Anexo 16: Tarefa 3

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:_________________________________ Nº______

Nome:_________________________________ Nº______ Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 3: Que sabor de gelado gostas mais?

1. A professora de Matemática tem interesse em saber as preferências dos seus alunos no sabor de gelados, para isso fez um inquérito e obteve os seguintes resultados.

Sabor Preferido	**Nº de alunos**
Morango	
Baunilha	
Ambos os sabores	
Nenhum dos anteriores	

1.1. Representa os resultados obtidos na tua turma, através de um Diagrama de Venn.

1.2. Tendo em conta o Diagrama que construíste na alínea anterior, determina a probabilidade de:

1.2.1. Gostar de morango;

1.2.2. Gostar de baunilha, sabendo que gosta de morango;

1.2.3. Gostar de morango e baunilha;

1.3. Se metade dos alunos que preferem apenas morango preferissem apenas baunilha, escolhido um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de gostar de morango sabendo que gosta de baunilha? O que é que alterou no cálculo dessa probabilidade relativamente à questão 1.2.2.?

1.4. Imagina que 12 alunos gostavam apenas de morango. Escolhi um aluno ao acaso. Sabendo que esse aluno gostava de morango, a probabilidade de gostar também de baunilha é de 1/3. Quantos alunos gostavam de ambos os sabores? Justifica o teu raciocínio.

2. Um aluno da Escola Profissional Agrícola de Runa tem dois testes no mesmo dia – Português e Matemática. A probabilidade de ter positiva no teste de Português é de 0,7, a probabilidade de ter positiva no teste de Matemática é 0,6 e a probabilidade de ter positiva nos dois é 0,4.

Determine a probabilidade de o aluno:

2.1. Não ter positiva em nenhum teste.

2.2. Ter positiva no teste de Matemática, sabendo que teve negativa no teste de Português.

Anexo 17: Tarefa 4

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:___________________________________ Nº______

Nome:___________________________________ Nº______ Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 4: A caixa de Bombons e o acaso dos cartões

1. Eu tenho em casa duas caixas de bombons para oferecer aos amigos que me visitam. Uma caixa vermelha com cinco bombons de chocolate e quatro bombons de leite e uma caixa azul com três bombons de chocolate e um de leite.

   Lancei um dado para selecionar uma caixa: se sair número par, escolho a caixa vermelha; se sair número ímpar, escolho a caixa azul. Em seguida extraio um bombom da caixa que for escolhida.

   1.1. Constrói um Diagrama de Árvore que represente a situação descrita.

   1.2. Determina a probabilidade para cada um dos seguintes casos:
   a. O bombom extraído ser de leite, sabendo que é da caixa vermelha.
   b. O bombom extraído ser de chocolate.
   c. O bombom extraído ser da caixa azul, sabendo que é um bombom de chocolate.

   1.3. Lê a seguinte afirmação: “A probabilidade de o bombom ser da caixa azul, sabendo que é de chocolate tem precisamente o mesmo valor da probabilidade do bombom ser de chocolate, sabendo que é da caixa azul.” Diz se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifica a tua resposta.

2. Tenho comigo dez cartões, cada um com um número escrito. Cinco dos números são positivos e cinco são negativos.

2.1. Retiro ao acaso dois desses cartões. Existe maior probabilidade do produto dos números neles escritos ser positivo ou ser negativo? Explica a tua resposta.

2.2. A conclusão a que chegaste na questão anterior manter-se-á no caso de serem retirados três cartões? Justifica a resposta que deres.

2.3. Se escolhermos três cartões, qual é a probabilidade de sair dois cartões com número positivo, sabendo que o produto dos números dos três cartões dá um número positivo?

Anexo 18: Tarefa 5

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:______________________________________ Nº______

Nome:______________________________________ Nº______ Turma: **27.ºB**

Acontecimentos Independentes

1. Vamos fazer uma experiência com um dado de faces numeradas de 1 a 6 e com uma moeda de 1€. A experiência consiste em:

1º - lançar o dado e registar se a face que fica voltada para cima tem um número par ou ímpar;

2º - lançar a moeda ao ar e registar se sai face nacional ou face euro.

1.1. Realiza 20 vezes a experiência com o teu grupo e completa a tabela que se segue.

Experiência	Dado	Moeda
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

1.2. De acordo com os dados que obtiveste na alínea anterior. Determina:

i. A probabilidade de sair face nacional.

ii. A probabilidade de sair número par.

iii. A probabilidade de sair face nacional e sair número par.

iv. $P(P) \times P(N)$

1.3. Compara os resultados que obtiveste nas alíneas c) e d) da questão anterior. O que concluis?

Anexo 19: Tarefa 6

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:________________________________ Nº______

Nome:________________________________ Nº______ Turma: **27.°B**

Probabilidade Condicionada 6: Os professores e o Carnaval de Torres Vedras

1. Numa escola, há professores de ambos os géneros (masculino e feminino), uns fumadores, outros não. A tabela seguinte mostra o número de indivíduos em cada um dos casos:

	Masculino	*Feminino*	*Totais*
Fumador	5	10	**15**
Não fumador	15	50	**65**
Totais	**20**	**60**	**80**

1.1. Escolhendo um professor ao acaso, qual é a probabilidade de:

a. Ser do género masculino

b. Ser fumador?

c. Ser não fumador e não ser do género masculino?

d. Ser fumador, sabendo que é do género masculino?

2. O responsável pela organização do carnaval de Torres Vedras, este ano, decidiu sortear uma equipa de entre as duas que se disponibilizaram para ficar encarregue de organizar um peddy-paper à cidade durante essa época festiva.

   Para o efeito, numa urna colocam-se duas bolas verdes e três amarelas e extraem-se sequencialmente duas bolas dessa urna.

   A **equipa A** faz a extração da primeira bola, que não volta a colocar na urna e faz, depois, a extração da segunda bola.

   A **equipa B** faz a extração da primeira bola, coloca-a novamente na urna e faz, depois, a extração da segunda.

   Será sorteada a primeira equipa a retirar duas bolas verdes.

   a. Qual a probabilidade de sair uma bola verde na primeira extração feita por cada uma das equipas?

   b. Qual a probabilidade de sair bola verde na segunda extração feita por cada uma das equipas?

   c. Qual a equipa que terá maior probabilidade de ser organizadora do peddy-paper?

Anexo 20: Tarefa 7

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:_________________________________ Nº______

Nome:_________________________________ Nº______ Turma: **27.ºB**

Probabilidade Condicionada 7: Problemas

1. Num encontro de 1500 jovens, verificou-se que, para além de português:
   - 50% dos jovens falavam inglês;
   - 40% dos jovens falavam francês;
   - 20% dos jovens não falavam nem inglês nem francês.

1.1. Quantos jovens falavam inglês e não falavam francês?

1.2. Escolhendo um jovem ao acaso, qual é a probabilidade de:

a. O jovem falar francês, sabendo-se que também fala inglês?

b. O jovem falar inglês, sabendo-se que também fala francês?

c. O jovem falar apenas francês?

2. Tenho no bolso dois sacos iguais com rebuçados: um saco azul com 2 rebuçados de laranja e 2 de morango, e um saco branco com 2 rebuçados de laranja e 3 de morango. De um dos sacos, escolhido ao acaso, tirei um rebuçado, também escolhido ao acaso. Tendo verificado que esse rebuçado era de morango, qual é a probabilidade de que tenha sido tirado do saco azul.

3. Num estudo feito para determinar a frequência e a dependência do daltonismo em relação ao sexo, escolheram-se ao acaso 1000 pessoas e observaram-se os seguintes resultados apresentados na tabela ao lado.

	Feminino	Masculino	Totais
Daltónico	2	24	26
Normal	518	456	974
Totais	520	480	1000

   a. Qual é a probabilidade de uma pessoa ser do sexo feminino, sabendo que a pessoa é daltónica? (Apresenta o resultado em forma de fração irredutível.)
   b. Qual é a probabilidade de uma pessoa ser daltónica, sabendo que a pessoa é do sexo masculino? (Apresenta o resultado em forma de dízima.)
   c. Qual é a probabilidade de uma pessoa ser do sexo masculino, sabendo que a pessoa é daltónica? (Apresenta o resultado em forma de fração irredutível.)
   d. Qual é a probabilidade de uma pessoa ser daltónica, sabendo que a pessoa é do sexo feminino? (Apresenta o resultado em forma de fração irredutível.)
   e. Qual é a probabilidade de ser do sexo feminino e não ser daltónico? (Apresenta o resultado em forma de percentagem.)

4. Na tabela, encontra-se a distribuição, por sexo, dos votos obtidos pelas quatro listas concorrentes nas eleições para a direção do Grupo Desportivo de Caldas da Rainha.

Listas	A	B	C	D
Nº de votos de homens	714	624	358	305
Nº de votos de mulheres	518	411	255	250

Escolheu-se aleatoriamente um desses indivíduos. Sejam *H* e *D* os acontecimentos seguintes:

H: "Ser um homem."

D: "Votar na lista D."

Verifica se os acontecimentos *H* e *D* são, ou não, acontecimentos independes. Em cálculos intermédios apresenta os resultados aproximados às milésimas.

Anexo 21: Minificha

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal

Matemática

2016/2017

Nome:____ Nº_____ Turma: **27.ºB**

Minificha

1. Numa fábrica é produzido um determinado tipo de peças para computadores. Numa operação de controlo de qualidade registaram-se os seguintes dados, relativos às duas máquinas que produzem as peças.

	Máquina X	Máquina Y
Boas	72	68
Defeituosas	8	2

As peças foram colocadas numa caixa e, posteriormente, foi retirada uma ao acaso. Qual a probabilidade de:

1.1. sair uma peça da máquina X, sabendo que é boa? (Apresente o resultado em percentagem)

1.2. sair uma peça defeituosa, sabendo que foi produzida pela máquina Y? (Apresente o resultado em percentagem)

2. Numa turma com 24 alunos, sabe-se que 18 alunos estão inscritos em Matemática, 15 em Geografia e 3 em nenhuma destas disciplinas.

2.1. Escolhendo um aluno ao acaso, qual a probabilidade de este:

a) Estar inscrito apenas em Matemática;

b) Estar inscrito em ambas as disciplinas;

c) Estar incrito em Geografia sabendo que está inscrito em Matemática;

d) Estar inscrito nas duas disciplinas, sabendo que está inscrito em Geografia.

3. Tenho dois cestos de fruta, um cesto castanho e um cesto verde. O cesto castanho tem 15 maçãs e 10 peras e o cesto verde tem 8 maçãs e 5 peras.

Ao acaso escolheu-se um cesto e também ao acaso retirou-se um fruto.
Verificou-se que saiu uma maçã.
Qual a probabilidade de ter saído do cesto verde?

Anexo 22: Tarefa - Entrevista

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal
Matemática
2016/2017
Nome:______________________________ Nº_____ Turma: **27.ºB**

Entrevista

1. A administração de uma empresa pública concluiu que 30% dos seus funcionários não tinham as características necessárias para serem considerados competentes e que 70% eram competentes.

Era necessário abrir um concurso para avaliar as capacidades dos funcionários já existentes na empresa. Para tal foi, inicialmente, elaborado um teste que foi aplicado a estes funcionários.

Verificou-se que só 90% dos funcionários competentes passaram no teste e que % dos funcionários considerados não competentes também passaram.

Com base nos resultados obtidos é feita a seleção de novos funcionários.

1.1. Sabendo que um candidato a funcionário passou no teste, calcula a probabilidade, sob a forma de dízima arredondada às centésimas, de ele ser competente.

1.2. Calcula a probabilidade de um candidato ser competente, sabendo que ele não passou no teste. Apresente o resultado sob a forma de dízima arredondada às centésimas.

Anexo 23: Guião da Entrevista

Escola Profissional Agrícola Fernando Barros Leal		
Matemática	**2016/2017**	
Nome:______________________________	Nº_____	Turma: **27.ºB**

Entrevista

1. A administração de uma empresa pública concluiu que 30% dos seus funcionários não tinham as características necessárias para serem considerados competentes e que 70% eram competentes.

Era necessário abrir um concurso para avaliar as capacidades destes funcionários já existentes na empresa. Para tal foi, inicialmente, elaborado um teste que foi aplicado a estes funcionários.

Verificou-se que só 90% dos funcionários competentes passaram no teste e que 20% dos funcionários considerados não competentes também passaram.

1.1. Sabendo que um candidato a funcionário passou no teste, calcula a probabilidade de ele ser competente. Apresenta o resultado sob a forma de dízima arredondada às centésimas.

1.2. Calcula a probabilidade de um candidato ser competente, sabendo que ele não passou no teste. Apresenta o resultado sob a forma de dízima arredondada às centésimas.

Questões:

- Como é que pensaste?
- Como é que chegaste a esse valor?
- O que é para ti, uma probabilidade condicionada?
- Neste caso, quais são os casos favoráveis e os casos possíveis?
- Explica as operações que fizeste?
- Quais foram as dificuldades que tiveste em resolver este exercício?